Extra Opgaven Predikatenlogica: Geldige Redeneringen

Opgaven

Bewijs de geldigheid van de volgende redeneringen.

1. $\forall x\ (Ax \to Bx), \forall x\ Ax \ \ /\ \ \forall x\ Bx,$
2. $\forall x\ (Ax \to Bx), \exists x\ (Ax \wedge Cx) \ \ /\ \ \exists x\ (Bx \wedge Cx),$
3. $\neg\forall x\ (Ax \to Bx) \ \ /\ \ \exists x\ Ax,$
4. $\forall x\ (Ax \to Bx), \exists x\ \neg Bx \ \ /\ \ \exists x\ \neg Ax,$
5. $\forall x \forall y \forall z\ ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \ \exists x \exists y\ (x \neq y \wedge Rxy \wedge Ryx) \ \ /\ \ \exists x\ Rxx$
6. $\exists x \forall y\ Rxy,\ \forall x \forall y\ (Rxy \to Ryx) \ \ /\ \ \forall x \exists y\ Rxy$

Extra Opgaven Predikatenlogica: Geldige Redeneringen

Modeluitwerkingen

1. $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx), \forall x\ Ax \ \ /\ \ \forall x\ Bx$
   Stel M is een willekeurig model waarin de premissen van de redenering waar zijn. Op basis van de tweede premisse weten wij dan dat elk object in het domein van M de eigenschap A heeft. De eerste premisse zegt dat elk object in het domein die de eigenschap A in M heeft ook eigenschap B in M heeft. Omdat elk object eigenschap A heeft moet dus ook elk object eigenschap B hebben. Hieruit volgt dat in M ook de zin $\forall x\ Bx$, i.e. de conclusie van de redenering waar is. Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

2. $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx), \exists x\ (Ax \wedge Cx) \ \ /\ \ \exists x\ (Bx \wedge Cx)$
   Stel M is een willekeurig model waarin de premissen van de redenering waar zijn. Op basis van de tweede premisse weten wij dan dat er een object e in het domein van M is dat zowel de eigenschap A als de eigenschap C in M heeft. De eerste premisse zegt dat alle objecten in het domein van M die de eigenschap A hebben ook eigenschap B in M hebben. Omdat e de eigenschap A heeft moet e dus ook de eigenschap B hebben. Object e heeft dus eigenschap B en eigenschap C. Er is dus een object in het domein van M dat zowel eigenschap B als eigenschap C heeft, namelijk e. Hieruit volgt dat in M ook de zin $\exists x\ (Bx \wedge Cx)$, i.e. de conclusie van de redenering waar is. Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

3. $\neg\forall x\ (Ax \rightarrow Bx) \ \ /\ \ \exists x\ Ax$
   Stel M is een willekeurig model waarvoor de premisse van de redenering waar is. De premisse zegt dat niet voor alle objecten a van het domein van M geldt dat als a de eigenschap A heeft a ook de eigenschap B in M heeft. Deze zin is waar in M desda er minstens één object a in het domein van M is dat in M wel de eigenschap A, maar niet de eigenschap B heeft. Stel e is zo'n object in het domein van M. Dan geldt voor e in het bijzonder dat e in M de eigenschap A heeft. Er is dus minstens één object in het domein van M dat de eigenschap A heeft. Hieruit volgt dat in M de zin $\exists x\ Ax$, i.e. de conclusie

van de redenering waar is. Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

4. $\forall x\ (Ax \to Bx), \exists x\ \neg Bx\ \ /\ \ \exists x\ \neg Ax$
Stel M is een willekeurig model waarin de premissen van de redenering waar zijn. Dan weten wij op basis van de tweede premisse dat er een object e in het domein van M is dat de eigenschap B niet heeft. De eerste premisse zegt dat alle objecten in het domein van M die de eigenschap A hebben ook eigenschap B hebben. Stel nu dat e in M de eigenschap A zou hebben. Dan zou op grond van de eerste premisse e ook de eigenschap B moeten hebben. Maar wij weten al dat e in M de eigenschap B niet heeft. Dus e kan de eigenschap A niet hebben. Dan is er dus minstens één object in het domein van M dat de eigenschap A niet heeft, namelijk e. Hieruit volgt dat in M ook de zin $\exists x\ \neg Ax$, i.e. de conclusie van de redenering waar is. Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

5. $\forall x \forall y \forall z\ ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \ \exists x \exists y\ (x \neq y \wedge Rxy \wedge Ryx)\ \ /\ \ \exists x\ Rxx$
Stel M is een willekeurig model waarin de premissen van de redenering waar zijn. Op basis van de tweede premisse weten wij dan dat er in het domein van M twee van elkaar verschillende objecten a en b zijn zodat a in de relatie R tot b staat, en ook omgekeerd b in de relatie R tot a staat. De eerste premisse zegt dat in M de relatie R transitief is, i.e. als er drie (niet noodzakelijk verschillende) objecten in het domein van M zijn zodat het eerste in de relatie R tot het tweede staat, en het tweede in de relatie R tot het derde, dan moet ook het eerste object tot het derde in de relatie R staan. Wij weten dat in M a in de relatie R tot b staat en b in de relatie R tot a. Dan volgt uit de transitiviteit van R dat in M a ook in de relatie R tot zichzelf moet staat. Dan is er dus minstens één object in het domein van M dat in de relatie R tot zichzelf staat, namelijk a. Hieruit volgt dat in M ook de zin $\exists x\ Rxx$, i.e. de conclusie van de redenering waar is. Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.

6. $\exists x \forall y\ Rxy,\ \forall x \forall y\ (Rxy \to Ryx)\ \ /\ \ \forall x \exists y\ Rxy$
Stel M is een willekeurig model waarin de premissen van de redenering waar zijn. Op basis van de eerste premisse weten wij dat er in het domein van M een object e is dat in de relatie R staat tot alle objecten in het domein. De tweede premisse zegt dat in M de relatie R symmetrisch is, i.e., als een object a in de relatie R tot een object b staat, dan staat ook omgekeerd b in de relatie R tot a. Wij weten al dat in M e in de relatie R staat tot elk object in het domein. Dus moet op basis van de tweede premisse in M ook elk object in de relatie R tot e staan. Dan is er dus in M voor elk object een object te vinden (namelijk e) zodat hij in de relatie R tot dat object staat. Hieruit volgt dat in M ook de zin $\forall x \exists y\ Rxy$, i.e. de conclusie van de redenering waar is. Deze argumentatie gaat op voor elk model dat de premissen waar maakt. Dus, de redenering is geldig.