Logica en de Linguistic Turn
2017/2018

Peter van Ormondt
P.vanOrmondt@uva.nl
http://www.vanormondt.net/~peter/teaching/2017/llt/

INSTITUTE FOR LOGIC, LANGUAGE AND COMPUTATION

26 september 2017

Propositielogica

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

- Een logisch systeem bestaat uit

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

- Een logisch systeem bestaat uit een vocabulaire en syntaxis, een semantiek en een notie van geldigheid.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

- Een logisch systeem bestaat uit een vocabulaire en syntaxis, een semantiek en een notie van geldigheid.
  - Hoe zijn zinnen gestructueerd?
  - Wat zijn de logische constanten van de taal en wat is hun betekenis?
  - Wanneer zijn redeneringen geldig?

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Zinnen van de categorische logica werden geanalyseerd als een subject, predicaat en copula. Hierdoor vielen veel dingen die we zouden willen kunnen zeggen, en belangrijker misschien wel, die interessante logische eigenschappen hebben, buiten de boot.

We konden bijvoorbeeld niet zeggen:

(1) Alle mensen zijn zoogdieren *en* sommige tijgers zijn niet gestreept.

We konden dus geen *conjunctie* maken van twee zinnen. Of:

(2) Als sommige tijgers niet gestreept zijn dan zijn sommige tijgers wit.

We konden dus geen implicatie maken van twee zinnen.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Aristoteles zag zijn logica als een bron van wetenschappelijke kennis. Met behulp van geldige syllogismen krijgen we, als we twee ware premissen invullen, een gegarandeerd ware conclusie terug! De nadruk ligt dus op bewijsvoering.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Aristoteles zag zijn logica als een bron van wetenschappelijke kennis. Met behulp van geldige syllogismen krijgen we, als we twee ware premissen invullen, een gegarandeerd ware conclusie terug! De nadruk ligt dus op bewijsvoering.

Het hoogtepunt van wetenschap en bewijsvoering in de oudheid was het boek *De elementen* van Euclides. Hierin wordt onder aanname van een aantal axoma's en gebruikmaking van afleidingsregels strict logisch alle stellingen bewezen.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Aristoteles zag zijn logica als een bron van wetenschappelijke kennis. Met behulp van geldige syllogismen krijgen we, als we twee ware premissen invullen, een gegarandeerd ware conclusie terug! De nadruk ligt dus op bewijsvoering.

Het hoogtepunt van wetenschap en bewijsvoering in de oudheid was het boek *De elementen* van Euclides. Hierin wordt onder aanname van een aantal axoma's en gebruikmaking van afleidingsregels strict logisch alle stellingen bewezen.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Propositie (Euclides)

Voor ieder lijnstuk bestaat een gelijkzijdige driehoek met dat lijnstuk als één van zijn zijden.

Hoe zouden we dit representeren in Aristotelische logica?

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Voor ieder lijnstuk bestaat een gelijkzijdige driehoek met dat lijnstuk als één van zijn zijden.

Vertaalsleutel:

kwantor: alle (a)

S: lijnstuk

P: dingen waarvoor een gelijkzijdige driehoek bestaat met dat lijnstuk als één van zijn zijden.

SaP

Dit betekent dat het een conclusie moet zijn van Barbara:

Alle lijnstukken zijn M

Alle M zijn dingen waarvoor een gelijkzijdige driehoek bestaat met dat lijnstuk als één van zijn zijden.

$\therefore$ Voor ieder lijnstuk bestaat een gelijkzijdige driehoek met dat lijnstuk als één van zijn zijden.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Het probleem is dat we de propositie van Euclides moeten analyseren in termen van subject en object met één en slechts één kwantor, terwijl de juiste analyse is dat van een meervoudig gekwantificeerde relationele uitspraak. Logica moet nog vele eeuwen wachten op deze analyse (en wij nog een aantal weken!).

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

We hebben gezien hoe we imperfecte syllogismen kunnen reduceren naar perfecte syllogismen. De geldigheid van imperfecte syllogismen is gegarandeerd door de intuïtieve inzichtelijkheid van de geldigheid van de perfecte.

Op de achtergrond wordt dus de volgende redenering ingezet (bijvoorbeeld reductie Cesare op Celarent):

Als Celarent geldig is, dan is Cesare geldig
Celarent is geldig

Cesare is geldig

Aristoteles bewijst logische eigenschappen van zijn systeem met behulp van logische principes die niet zijn te representeren in dat systeem zelf.

Opmerkingen vooraf: Lessen van de categorische logica

Maar zoals we in de eerste werkgroep zagen hebben dergelijke zinsconstructies wel degelijk interessante logische eigenschappen.

Als het mooi weer is, dan gaan we naar het strand.
Het is mooi weer.

We gaan naar het strand.

Alle mensen zijn man of vrouw.
Alle vrouwen zijn sterfelijk.
Alle mannen zijn sterfelijk.

Alle mensen zijn sterfelijk.

Propositielogica als reactie op categorische logica

Een reden voor de specifieke vorm van syllogistiek en categorische zinnen kan zijn dat Aristoteles een logica ontwikkelde dat vooral bedoeld was als 'demonstratie', i.e., (formeel) bewijs. Alleen verschilt de structuur van de argumenten met de structuur van de argumenten die voorkomen in *De elementen* van Euclides (o.a. door een analyse van zinnen in Subject-predicaat-structuur).

Ten dele als reactie op Aristoteles en zijn volgelingen keken filosofen in de Megarische en Stoische traditie ook juist naar het taalgebruik zelf in bijvoorbeeld discussies en de Megarische paradoxen en beschouwden logica als onderdeel van filosofie.

Propositielogica

For, although Aristotelian and Stoic theories are in fact complementary, they were treated as alternatives. By the time it became clear that they should be amalgamated, the intellectual impetus of the ancient world was spent, and there was no one of the requisite stature for the task. (Kneale and Kneale, 1984, p. 115)

Chrysippus van Soli (c.280-207 BC)

- Ontdekker van de propositielogica
- 118 werken over logica
- Zeven boeken over *De leugenaar*
- Ongebruikelijke opvatting van modale logica ("het onmogelijke kan volgen uit het mogelijke")

Propositielogische principes van Chrysippus

Als p, dan q. Maar p, dus q.

Als p, dan q. Maar niet-q, dus niet-p.

Niet en p en q. Maar p, dus niet-q.

Of p, of q. Maar niet-q, dus p.

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
   Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
   Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.
4. *Koning Willem-Alexander is het staatshoofd van Nederland.*

Propositielogica

Propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal. De logische constanten zijn connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
   Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.
4. *Koning Willem-Alexander is het staatshoofd van Nederland.*
   Koning Willem-Alexander is het staatshoofd van Nederland.

Propositielogica

We beperken ons in propositielogica tot indicatieve zinnen: zinnen die een feit uitdrukken en of waar of onwaar zijn. Nu kunnen we een nieuwe notie invoeren, dat van waarheidswaarde:

Propositielogica

We beperken ons in propositielogica tot indicatieve zinnen: zinnen die een feit uitdrukken en of waar of onwaar zijn. Nu kunnen we een nieuwe notie invoeren, dat van waarheidswaarde:

Definitie (Waarheidswaarde)

We zeggen dat de waarheidswaarde van een zin 1 is, als de zin waar is, en 0 als de zin onwaar is.

Propositielogica

We beperken ons in propositielogica tot indicatieve zinnen: zinnen die een feit uitdrukken en of waar of onwaar zijn. Nu kunnen we een nieuwe notie invoeren, dat van waarheidswaarde:

Definitie (Waarheidswaarde)

We zeggen dat de waarheidswaarde van een zin 1 is, als de zin waar is, en 0 als de zin onwaar is.

We zullen betekenis van zinnen gaan definiëren door waarheidscondities te formuleren.

Propositielogica

We beperken ons in propositielogica tot indicatieve zinnen: zinnen die een feit uitdrukken en of waar of onwaar zijn. Nu kunnen we een nieuwe notie invoeren, dat van waarheidswaarde:

Definitie (Waarheidswaarde)

We zeggen dat de waarheidswaarde van een zin 1 is, als de zin waar is, en 0 als de zin onwaar is.

We zullen betekenis van zinnen gaan definiëren door waarheidscondities te formuleren.

> *Einen Satz verstehen, heißt, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist. (Man kann ihn also verstehen, ohne zu wissen, ob er wahr ist.) Man versteht ihn, wenn man seine Bestandteile versteht.*
>
> *[Wittgenstein, TLP, 4.024]*

Propositielogica

Het volgende principe wordt nu van belang.

Propositielogica

Het volgende principe wordt nu van belang.

Definitie (Principe van compositionaliteit van betekenis)

De betekenis van een zin wordt bepaald door de betekenis van de delen waaruit de zin is opgebouwd. (Gamut, 1991, §1.2)

Propositielogica

Het volgende principe wordt nu van belang.

Definitie (Principe van compositionaliteit van betekenis)

De betekenis van een zin wordt bepaald door de betekenis van de delen waaruit de zin is opgebouwd. (Gamut, 1991, §1.2)

Om dus de betekenis van een zin te bepalen zullen we zinnen dus moeten ontleden en kijken naar de betekenis van de delen waaruit die zin is opgebouwd.

Abstractie

Abstractie

Voorbeeld

$\boxed{\textit{Berend loopt naar het station}}$ $\boxed{\textit{en}}$ $\boxed{\textit{het regent hard}}$

Abstractie

Voorbeeld

Berend loopt naar het station *en* *het regent hard*

propositieletter

p

Abstractie

Voorbeeld

$\boxed{\textit{Berend loopt naar het station}}$ $\boxed{\textit{en}}$ $\boxed{\textit{het regent hard}}$

propositieletter *propositieletter*

p q

Abstractie

Voorbeeld

Berend loopt naar het station *en* *het regent hard*

propositieletter *conjunctie* *propositieletter*

$$p \quad \wedge \quad q$$

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
4. p onwaar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
4. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.

Laten we dit in een mooie tabel zetten!

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waarheidstafel van de conjunctie

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waarheidstafel van de conjunctie

We kunnen zeggen dat deze waarheidstafel de betekenis van de conjunctie vastlegt.

Logische constanten

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent $(p \wedge q)$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent ($p \wedge q$)
- Disjunctie. Symbool: $\vee$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent $(p \wedge q)$
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent $(p \vee q)$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent $(p \wedge q)$
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent $(p \vee q)$
- Implicatie. Symbool: $\rightarrow$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent ($p \wedge q$)
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent ($p \vee q$)
- Implicatie. Symbool: $\rightarrow$
  Voorbeeld: Als Jan loopt dan rent Piet ($p \rightarrow q$)

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent ($p \wedge q$)
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent ($p \vee q$)
- Implicatie. Symbool: $\rightarrow$
  Voorbeeld: Als Jan loopt dan rent Piet ($p \rightarrow q$)
- Equivalentie. Symbool: $\leftrightarrow$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent $(p \wedge q)$
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent $(p \vee q)$
- Implicatie. Symbool: $\rightarrow$
  Voorbeeld: Als Jan loopt dan rent Piet $(p \rightarrow q)$
- Equivalentie. Symbool: $\leftrightarrow$
  Voorbeeld: Jan loopt desda Piet rent $(p \leftrightarrow q)$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent $(p \wedge q)$
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent $(p \vee q)$
- Implicatie. Symbool: $\rightarrow$
  Voorbeeld: Als Jan loopt dan rent Piet $(p \rightarrow q)$
- Equivalentie. Symbool: $\leftrightarrow$
  Voorbeeld: Jan loopt desda Piet rent $(p \leftrightarrow q)$
- Negatie. Symbool: $\neg$

Logische constanten

- Conjunctie. Symbool: $\wedge$
  Voorbeeld: Jan loopt en Piet rent ($p \wedge q$)
- Disjunctie. Symbool: $\vee$
  Voorbeeld: Jan loopt of Piet rent ($p \vee q$)
- Implicatie. Symbool: $\rightarrow$
  Voorbeeld: Als Jan loopt dan rent Piet ($p \rightarrow q$)
- Equivalentie. Symbool: $\leftrightarrow$
  Voorbeeld: Jan loopt desda Piet rent ($p \leftrightarrow q$)
- Negatie. Symbool: $\neg$
  Voorbeeld: Het is niet zo dat Jan loopt ($\neg p$)

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Laten we de de taal der propositielogica $\mathcal{L}$ noemen.

Definitie (Vocabulaire van $\mathcal{L}$)

Het vocabulaire van de propositielogica $\mathcal{L}$ zal bestaan uit de volgende symbolen:

1. Symbolen voor propositieletters: $p, q, r, s, t, \ldots$. Soms gebruiken we indices: $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
2. Symbolen voor connectieven en leesbaarheid: $), (, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$.

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Nu leggen we vast wanneer een sequentie van symbolen een *welgevormde* formule van de propositielogica is.

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Nu leggen we vast wanneer een sequentie van symbolen een *welgevormde* formule van de propositielogica is.

Definitie (Syntaxis van $\mathcal{L}$)

1. Alle propositie letters in het vocabulaire zijn formules van $\mathcal{L}$.
2. Als ψ een formule is van $\mathcal{L}$, dan is $(\neg\psi)$ dat ook.
3. Als φ, ψ een formule is van $\mathcal{L}$, dan zijn $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules van $\mathcal{L}$.
4. Niets, behalve wat op grond van een eindig aantal toepassingen van clausules (1)-(3) is gegenereerd is een formule van $\mathcal{L}$.

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Voorbeeld

- $((\neg(\neg p)) \vee q) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Voorbeeld

- $((\neg(\neg p)) \vee q) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $((\neg(\neg(\neg(\neg p)))) \wedge (q \vee r)) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Voorbeeld

- $((\neg(\neg p)) \vee q) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $((\neg(\neg(\neg(\neg p)))) \wedge (q \vee r)) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $pq \to r \overset{?}{\in} \mathcal{L}$

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Voorbeeld

- $((\neg(\neg p)) \vee q) \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $((\neg(\neg(\neg(\neg p)))) \wedge (q \vee r)) \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $pq \to r \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}$ *Nee!*
- $(((p \vee q) \to \neg q) \to p) \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}$

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Voorbeeld

- $((\neg(\neg p)) \vee q) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $((\neg(\neg(\neg(\neg p)))) \wedge (q \vee r)) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*
- $pq \to r \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Nee!*
- $(((p \vee q) \to \neg q) \to p) \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ *Ja!*

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Nu we de taal hebben gedefiniëerd moeten we vastleggen wat de logische constanten betekenen. We zullen dit eerst doen a.h.v. waarheidstafels maar dit zullen we volgende week exact maken door middel van *valuatiefuncties*.

Propositielogica: van de grond opgebouwd

Nu we de taal hebben gedefiniëerd moeten we vastleggen wat de logische constanten betekenen. We zullen dit eerst doen a.h.v. waarheidstafels maar dit zullen we volgende week exact maken door middel van *valuatiefuncties*.
De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waarheidstafel van de conjunctie

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de negatie ziet er als volgt uit:

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de negatie ziet er als volgt uit:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Waarheidstafel van de negatie

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de disjunctie ziet er als volgt uit:

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de disjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Waarheidstafel van de disjunctie

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de implicatie ziet er als volgt uit:

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de implicatie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Waarheidstafel van de implicatie

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de equivalentie ziet er als volgt uit:

Propositielogica: van de grond opgebouwd

De waarheidstafel van de equivalentie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Waarheidstafel van de equivalentie

Conclusie

- We hebben de taal van de propositielogica geïntroduceerd.
- Een taal zonder kwantoren (zoals bij Aristotelische logica) waarin de logische eigenschappen van zinnen (proposities) kunnen worden bestudeerd. Proposities zijn opgebouwd uit propositieletters en logische connectieven (dit zijn de logische constanten).
- Betekenis van deze connectieven wordt vastgelegd m.b.v. van valuatiefuncties die mooi gerepresenteerd kunnen worden d.m.v. waarheidstafels.

Vragen?

Referenties I

L.T.F. Gamut. *Logic, Language, and Meaning. Volume 1: Introduction to Logic*. Chicago University Press, 1991.

William Kneale and Martha Kneale. *The Development of Logic*. Clarendon Press, 1984.