Logica en de Linguistic Turn
2017/2018

Peter van Ormondt
P.vanOrmondt@uva.nl

INSTITUTE FOR LOGIC, LANGUAGE AND COMPUTATION

31 oktober 2017

Predicatenlogica

Uitdrukkingskracht van Aristotelische en propositielogica

Zoals we hebben gezien kunnen we met Aristotelische logica sommige redeneringen niet goed representeren: 'Alle X zijn Y en Z, dus alle X zijn Y' niet uitdrukken.

Alhoewel we met propositielogica conjunctie (en andere connectieven) wel goed kunnen uitdrukken zijn er ook hier restricties: 'Alle X zijn Y, Geen Y is Z, dus Geen X is Z'.

Je kan in propositielogica de universele zinnen wel uitdrukken. Bijvoorbeeld:

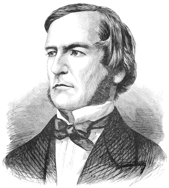
$Y \to X$	Alle X zijn Y
$Y \to \neg X$	Geen X zijn Y

maar hoe druk je de particulier zinnen uit? En hoe zit het met meervoudig gekwantificeerde uitdrukkingen?

Logica is misschien wel af?

Daß die Logik diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen sei, läßt sich daraus ersehen, daß sie seit dem Aristoteles keinen schritt rückwärts hat tun dürfen [...] Merkwürdig ist noch an ihr, daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint. (Kant, 1787, Kritik der reinen Vernunft, BVIII, 18–27)

Logica tussen Kant en Frege: Boole



George Boole
(1815–1864)

- Schoolleraar in Lincolnshire
- Hoogleraar in Cork (1849)
- *An Investigation of the Laws of Thought* (1854)

"No general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise, not only the special numerical bases of the science, but also those universal laws of thought which are the basis of all reasoning, and which, whatever they may be as to their essence, are at least mathematical as to their form."

"It is not of the essence of mathematics to be conversant with the ideas of number and quantity."

Logica tussen Kant en Frege: Boole

George Boole ontwikkelde een logische algebra met als achterliggende gedachte dat de extensie van de predicaten van de taal de objecten van de algebra aanduiden.

Laat x en y extensies aanduiden. De universele extensie geven we aan met 1. De lege extensie geven we aan met 0. De doorsnede van twee extensies geven we aan met xy, met $x = y$ bedoelen we dat x en y dezelfde extensies hebben, i.e., dezelfde elementen hebben, en $x - y$ geeft het verschil aan.

$b(1-a) = 0$	Alle B zijn A
$ba = 0$	Geen B zijn A
$ba \neq 0$	Sommige B zijn A
$b(1-a) \neq 0$	Sommige B zijn niet A

Logica tussen Kant en Frege: Boole

"The chief novelty in Boole's system is his theory of elective functions and their development, or, as we should now say, his theory of truth-functions and their expression in disjunctive normal form. [...] We have quoted a passage of the Mathematical Analysis of Logic from which it was a short step to Frege's use of truth-tables (i.e. tabulations of alternative truth-possibilities) in his Begriffsschrift [...] In a paper of 1885 the American logician C. S. Peirce added the remark that a necessarily true formula was one which remained true under all assignments of truth-values to its constituents [...] And with these two notions we have all the essentials for the tabular method in primary logic which was popularized by Post and Wittgenstein in 1920." (Kneale and Kneale, 1984, p. 420)

De logica van relaties

Augustus de Morgan. *On the syllogism IV and on the logic of relations.* Cambridge Philosophical Transactions, X:331–358, 1864

C. S. Peirce. *The logic of relatives.* The Monist, 7(2):161–217, 1897

"We cannot, it is true, give Peirce the credit of being the first to conceive a comprehensive theory of general logic; for that honour must go to Frege, who published his Begriffsschrift in 1879. But so far as is known, Peirce had never heard of Frege when he published his paper on The Logic of Relatives in 1883, and his achievement therefore deserves commemoration."
(Kneale and Kneale, 1984)

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

(1) Socrates is wijs.

(2) Socrates is wijs en Plato is dom.

(3) Alle mensen zijn egoïstisch, maar sommige dieren altruïstisch.

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

(1) Socrates is wijs.

(2) Socrates is wijs en Plato is dom.

(3) Alle mensen zijn egoïstisch, maar sommige dieren altruïstisch.

(4) Voor alle even getallen x, is er een oneven getal y en $y = x + 1$.

(5) Maria houdt van alle LLT studenten.

(6) Alle LLT studenten houden van Maria.

(7) Den Haag ligt tussen Rotterdam en Amsterdam.

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

- Connectieven (negatie, conjunctie, disjunctie etc.)

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

- Connectieven (negatie, conjunctie, disjunctie etc.)
- We willen het over individuele dingen kunnen hebben.

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

- Connectieven (negatie, conjunctie, disjunctie etc.)
- We willen het over individuele dingen kunnen hebben.
- En over hun eigenschappen (Socrates is wijs).

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

- Connectieven (negatie, conjunctie, disjunctie etc.)
- We willen het over individuele dingen kunnen hebben.
- En over hun eigenschappen (Socrates is wijs).
- Kwantoren: we willen iets over alle mensen zeggen, en over sommige.

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

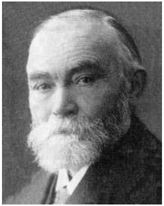
- Connectieven (negatie, conjunctie, disjunctie etc.)
- We willen het over individuele dingen kunnen hebben.
- En over hun eigenschappen (Socrates is wijs).
- Kwantoren: we willen iets over alle mensen zeggen, en over sommige.
- Maar we willen ook “geneste kwantoren”: voor alle x met een bepaalde eigenschap is er een y met een andere eigenschap.

Hoe ziet onze volgende logische taal eruit?

Wat zouden we uit willen kunnen drukken?

- Connectieven (negatie, conjunctie, disjunctie etc.)
- We willen het over individuele dingen kunnen hebben.
- En over hun eigenschappen (Socrates is wijs).
- Kwantoren: we willen iets over alle mensen zeggen, en over sommige.
- Maar we willen ook "geneste kwantoren": voor alle x met een bepaalde eigenschap is er een y met een andere eigenschap.
- We willen relaties tussen objecten uit kunnen drukken. Jan is langer dan Piet. En: Clark Kent is superman.

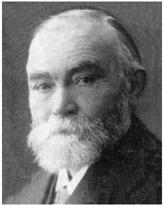
Gottlob Frege



(1848–1925)

- Hoogleraar in Jena.
- *Begriffschrift* (1879)
- *Grundgesetze der Arithmetik* (1893/1903).
- Frege wilde laten zien dat rekenkunde en logica identiek zijn.

Gottlob Frege



(1848–1925)

- Hoogleraar in Jena.
- *Begriffschrift* (1879)
- *Grundgesetze der Arithmetik* (1893/1903).
- Frege wilde laten zien dat rekenkunde en logica identiek zijn.

"Every good mathematician is at least half a philosopher, and every good philosopher is at least half a mathematician." (Frege, Nachgelassen Schriften)

"At any rate all mathematicians will have to be given up who, as soon as they run across logical expressions like "concept", "relation, judgement" think: metaphysica sunt, non leguntur!, and likewise all philosophers, who at the sight of a formula cry mathematica sunt, non leguntur!, and that's unlikely to be very few." (Frege, 1903)

Gottlob Frege

- Grondlegger van (moderne) taalfilosofie
- Grondlegger van (moderne) logica
- Bijdragen aan de grondslagen van de wiskunde (*logicisme*)
- Principe van compositionaliteit
- Onderscheid tussen *Sinn* en *Bedeutung*

Begriffsschrift

BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

Dr. GOTTLOB FREGE.

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.

HALLE a/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

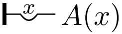
- Waarheidsfunctionele propositiecalculus,
- Analyse van de propositie in termen van functie en argument (in plaats van subject en predicaat),
- Theorie van kwantificatie,
- Een rigoreus afleidingsysteem dat gebaseerd is op vorm van de formules,
- Een logische definitie van het wiskundige begrip van een reeks.

Freges logisch systeem

"Alles is A"
"Iets is A"
"Niets is A"
"Sommige A zijn
B"

Freges logisch systeem

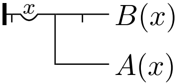
“Alles is A”



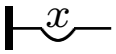
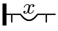
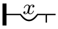
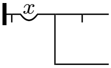
“Iets is A”

“Niets is A”

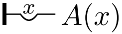
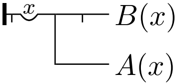
“Sommige A zijn B”



Freges logisch systeem

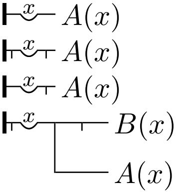
"Alles is A"	 $A(x)$	$\forall x A x$
"Iets is A"	 $A(x)$	$\exists x A x \equiv \neg \forall x \neg A x$
"Niets is A"	 $A(x)$	$\forall x \neg A x$
"Sommige A zijn B"	 $B(x)$ $A(x)$	$\exists x (Ax \wedge Bx) \equiv \neg \forall x (Ax \rightarrow \neg Bx)$

Freges logisch systeem

"Alles is A"		$\forall x Ax$
"Iets is A"		$\exists x Ax \equiv \neg\forall x \neg Ax$
"Niets is A"		$\forall x \neg Ax$
"Sommige A zijn B"		$\exists x(Ax \wedge Bx) \equiv \neg\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$

(The comfort of the typesetter is certainly not the *summum bonum*!)

Freges logisch systeem



"Alles is A"	$\forall x A x$
"Iets is A"	$\exists x A x \equiv \neg \forall x \neg A x$
"Niets is A"	$\forall x \neg A x$
"Sommige A zijn B"	$\exists x (Ax \wedge Bx) \equiv \neg \forall x (Ax \rightarrow \neg Bx)$

(The comfort of the typesetter is certainly not the *summum bonum*!)

Klassieke predicatenlogica wordt wel *eerste orde* predicatenlogica genoemd, omdat het kwantificeert over objecten. Daarnaast stond Frege kwantificatie over eigenschappen toe in zijn *tweede orde logica*, i.e., kwantificatie over verzamelingen van eigenschappen.

Voorbeelden: singuliere uitspraken en connectieven

(8) a. Jan loopt
    b. Lj

Voorbeelden: singuliere uitspraken en connectieven

(8) a. Jan loopt
b. Lj

(9) a. Jan loopt en Marie danst.
b. $Lj \wedge Dm$

Voorbeelden: singuliere uitspraken en connectieven

(8) a. Jan loopt
    b. Lj

(9) a. Jan loopt en Marie danst.
    b. $Lj \wedge Dm$

Merk op: Het predicaat wordt nu gezien als een *gegeneraliseerde propositie* of *propositionele functie*: Lx, waar ik voor de variabele x een term kan substitueren $[x/t]Lx$. Frege breekt hier met de eeuwenoude subject-predicaat analyse van proposities. Het grammaticale subject van een zin krijgt geen logische voorrang meer.

Voorbeelden: singuliere uitspraken en connectieven

(8) a. Jan loopt
 b. Lj

(9) a. Jan loopt en Marie danst.
 b. $Lj \wedge Dm$

Merk op: Het predicaat wordt nu gezien als een *gegeneraliseerde propositie* of *propositionele functie*: Lx, waar ik voor de variabele x een term kan substitueren $[x/t]Lx$. Frege breekt hier met de eeuwenoude subject-predicaat analyse van proposities. Het grammaticale subject van een zin krijgt geen logische voorrang meer.

(10) a. The Grieken versloegen de Perzen bij Plataea.
 b. The Perzen werden verslagen door de Grieken bij Plataea.

Voorbeelden: relaties

Daarnaast worden *relaties* nu gezien als primitief, i.e., een predicaat is een relatie dat één argument heeft. Maar we hebben ook twee-plaatsige relaties:

(11) a. Jan slaat Piet.
b. Ljp

Voorbeelden: relaties

Daarnaast worden *relaties* nu gezien als primitief, i.e., een predicaat is een relatie dat één argument heeft. Maar we hebben ook twee-plaatsige relaties:

(11) a. Jan slaat Piet.
     b. Ljp

(12) a. Als Jan Piet slaat, huilt Piet.
     b. $Ljp \to Hp$

Voorbeelden: relaties

Daarnaast worden *relaties* nu gezien als primitief, i.e., een predicaat is een relatie dat één argument heeft. Maar we hebben ook twee-plaatsige relaties:

(11) a. Jan slaat Piet.
 b. Ljp

(12) a. Als Jan Piet slaat, huilt Piet.
 b. $Ljp \rightarrow Hp$

(13) a. Den Haag ligt tussen Amsterdam en Rotterdam.
 b. $Ldar$

Voorbeelden: relaties

Daarnaast worden *relaties* nu gezien als primitief, i.e., een predicaat is een relatie dat één argument heeft. Maar we hebben ook twee-plaatsige relaties:

(11) a. Jan slaat Piet.
b. Ljp

(12) a. Als Jan Piet slaat, huilt Piet.
b. $Ljp \to Hp$

(13) a. Den Haag ligt tussen Amsterdam en Rotterdam.
b. $Ldar$

(14) $x < y$

(15) $x = y$ (wordt in Gamut als logische constante geïntroduceerd).

Voorbeelden: kwantificatie

(16) a. Iedereen liegt.
b. $\forall x L x$

Voorbeelden: kwantificatie

(16) a. Iedereen liegt.
b. $\forall x Lx$

(17) a. Sommige mensen zijn lief.
b. $\exists x(Mx \wedge Lx)$

Voorbeelden: kwantificatie

(16) a. Iedereen liegt.
b. $\forall x Lx$

(17) a. Sommige mensen zijn lief.
b. $\exists x(Mx \land Lx)$

(18) a. Alle LLT-studenten houden van Maria.
b. $\forall x(Sx \to Hxm)$

Voorbeelden: Meervoudige gekwantificeerde uitspraken

(19) a. Iedereen houdt van iemand.

b. $\forall x \exists y Hxy$ of $\exists x \forall y Hyx$

Voorbeelden: Meervoudige gekwantificeerde uitspraken

(19) a. Iedereen houdt van iemand.
b. $\forall x \exists y Hxy$ of $\exists x \forall y Hyx$

(20) a. Iemand houdt van iedereen.
b. $\exists x \forall y Hxy$

Hoe bouwen we logisch systeem?

Hoe bouwen we logisch systeem?

1. Vocabulaire.

Hoe bouwen we logisch systeem?

1. Vocabulaire.
2. Syntaxis.

Hoe bouwen we logisch systeem?

1. Vocabulaire.
2. Syntaxis.
3. Semantiek.

Hoe bouwen we logisch systeem?

1. Vocabulaire.
2. Syntaxis.
3. Semantiek.
4. Notie van geldigheid.

Vocabulaire

Een taal $\mathcal{L}$ van de predicatenlogica is gegeven met vijf verzamelingen van symbolen:

Individuele constanten: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Individuele variabelen: $x, y, z, u, w, v, x_1, x_2, \ldots, x_n$

Predicaten: P, Q, R. Vaak gebruiken we P om een predicaat aan te duiden en R om een relatie aan te duiden.

Logische constanten: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, =$. We kennen al deze symbolen al, behalve de laatste drie. Dit zijn respectievelijk, de *universele kwantor*, de *existentiële kwantor*, en het *identiteitsteken*. De laatste kunnen we opvatten als een tweeplaatsig relatieteken, maar zullen behandelen als logische constante.

Interpunctietekens We kennen al ')' en '(', en we voegen daar de komma ',' aan toe.

Syntaxis

Definitie

1. Als A een n-plaatsige predicaatletter is in de vocabulaire van $\mathcal{L}$ en $t_1, \ldots, t_n$ zijn een constante of een variabele in de vocabulaire van $\mathcal{L}$ dan is $At_1, \ldots, t_n$ een *formule* van $\mathcal{L}$.
2. Als t_1, t_2 een constante of variabele zijn van de vocabulaire, dan is $t_1 = t_2$ een formule in $\mathcal{L}$.
3. Als φ een formule is in $\mathcal{L}$ dan is $\neg\varphi$ dat ook.
4. Als $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ dan $\varphi \Box \psi \in \mathcal{L}$, waar $\Box \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$.
5. Als $\varphi \in \mathcal{L}$ en x een variable, dan zijn $\forall x \varphi$ en $\exists x \varphi$ ook formules van $\mathcal{L}$.
6. Alleen dat wat op grond van voornoemde clausules in een eindig aantal stapppen gegenereerd kan worden is een fomule van $\mathcal{L}$.

Referenties I

Augustus de Morgan. On the syllogism IV and on the logic of relations. *Cambridge Philosophical Transactions*, X:331–358, 1864.

Gottlob Frege. *Begriffsschrift, Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Louis Nebert Verlag, Halle, 1879. Translated as *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, by S. Bauer-Mengelberg in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik*. Verlag Hermann Pohle, Jena, 1903. Partly translated by P. Geach in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, P. Geach and M. Black (eds. and trans.), Oxford: Blackwell, third edition, 1980, pp. 159–250 (§56 ff.).

Referenties II

Immanuel Kant. *Kritik der reinen Vernunft*. Felix Meiner Verlag, 1787.

William Kneale and Martha Kneale. *The Development of Logic*. Clarendon Press, 1984.

C. S. Peirce. The logic of relatives. *The Monist*, 7(2):161–217, 1897.