Syllabus
Logica en de Linguistic Turn
2017/2018

Afdeling Wijsbegeerte
Faculteit der Geesteswetenschappen
Universiteit van Amsterdam

Erkenning: Hoofdstuk 1 is geschreven door Frank Veltman in 2002 en substantieel gereviseerd in 2009 en 2010 door Robert van Rooij, Katrin Schulz en andere leden van het docententeam. Hoofdstuk 2 is in 2009 geschreven door Katrin Schulz met medewerking van Paul Dekker en Robert Goené, en is gebaseerd op het boek 'Mathematical Methods in Linguistics' van Barbara Partee, Alice ter Meulen, en Robert Wall (1990). Hoofdstuk 3 is geschreven door Frank Veltman in 2002. Hoofdstuk 4 is geschreven door Paul Dekker in 2012 met waardevolle input van Maria Aloni, Michael Franke, Katrin Schulz, en Matthijs Westera; en gereviseerd in 2013 door Peter van Ormondt en in 2014 door Sylvia Pauw en Daphne Udo de Haes.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Categorische Logica

Het vak logica beoogt theorieën te ontwikkelen met behulp waarvan redeneringen op hun geldigheid getoetst kunnen worden. Plato was de eerste filosoof die het ideaal van een dergelijke wetenschap ontwikkelde. Zijn leerling Aristoteles was de eerste die aan de verwezenlijking van dit ideaal werkte. Vóór Aristoteles bestudeerde men redeneringen meer vanuit het oogpunt van discussietechniek. De achterliggende vraag bij dat onderzoek was niet 'Wanneer is een redenering geldig?'— een geldigheidsbegrip onderkende men nog niet — maar 'Wanneer zijn de toehoorders bij een openbaar debat overtuigd van iemands gelijk?'. Als men zich daarbij steeds zou hebben gericht op een zo kritisch mogelijke toehoorder, zou er weinig aan de hand geweest zijn. Dat deed men echter niet. In de dialectiek bleef geen drogreden, of sofisme zoals Aristoteles ze noemde, onbenut. Voor voorbeelden hiervan verwezen zij naar de aan sofisten toegeschreven redeneringen uit Plato's *Euthydemus* en uit Aristoteles' *De Sophisticis Elenchis*.

Aristoteles ging bij het opstellen van zijn theorie als volgt te werk. Hij isoleerde een fragment van de omgangstaal, de verzameling van categorische zinnen. Welke zinnen dat zijn en waarom Aristoteles juist deze zinnen van belang achtte wordt hier beneden uitgelegd. Vervolgens formuleerde hij regels waaraan gevolgtrekkingen die binnen dit fragment geformuleerd kunnen worden, moesten voldoen, wilden ze geldig zijn. Een en ander staat in *De Interpretatione*, hoofdstuk 1-11, en *Analytica Priora*, Boek 1, I-VII en XXIII-XXVI.

De titel van dit hoofdstuk suggereert dat er zoiets zou bestaan als *de* categorische logica. Zo is het niet. Wat in dit hoofdstuk onder 1.1 behandeld wordt, is min of meer de harde kern van een aantal *verschillende* theorieën, die alle hun wortels bij Aristoteles vinden. In 1.4 wordt nader op enkele van de verschillen ingegaan.

Ondanks het feit dat we niet te maken hebben met één categorische logica, meenden de traditionele logici allemaal dat hun theorie (slechts) een nadere uitwerking was van de Aristoteliaanse logica. Deze logica beschouwden ze bovendien als de enige 'ware' logica. Zo beweerde Kant bijvoorbeeld dat de logica bij Aristoteles begonnen was en door hem ook meteen was voltooid (cf. *Kritik der Reinen Vernunft*, B VIII).

1.1 De taal van de categorische logica

De categorische logica onderscheid zich, zoals iedere logische taal, van de natuurlijke taal door haar *formele* karakter. Een taal is formeel wanneer deze beschreven kan worden door middel van de volgende twee componenten:

Vocabulaire: De woorden die in de taal gebruikt worden.

Syntaxis: Regels die eenduidig vastleggen welke sequenties van woorden wel en welke niet tot de taal behoren.

Een sequentie van woorden die tot de taal behoort wordt ook wel een *zin* genoemd. De syntaxis definieert dus welke zinnen tot de taal behoren. Doordat een taal identiek is aan de totaliteit van haar zinnen, geeft de combinatie van vocabulaire en syntaxis een volledige beschrijving van een taal.

1.1.1 Vocabulaire

De vocabulaire van de categorische logica bestaat uit logische en niet-logische constanten. De niet-logische constanten worden *termen* genoemd. (De categorische logica wordt daarom ook wel een *term-logica* genoemd.) Deze termen worden aangeduid met de hoofdletters van het alfabet (A, B, C, enz.). Aangezien er aftelbaar veel termen zijn, zijn de 26 letters van het alfabet niet afdoende. We gebruiken daarom some indices alsvolgt A_1, A_2, A_3, $\ldots$. Binnen een bepaalde context moet aan iedere term een unieke letter worden toegewezen.

Naast de niet-logische constanten of termen, zijn er ook nog vier logische constanten. Deze worden aangeduid met de kleine letters a, e, i, en o.

1.1.2 Syntaxis

Uit de woorden van de categorische logica kunnen we zinnen maken, zoals gedefiniëerd in de volgende definitie.

Definitie 1.1.1 (Syntaxis)**.**

1. Als X en Y termen zijn, en $\bullet$ is één van de vier logische constanten, dan is $X \bullet Y$ een zin in de categorische logica.

2. Alleen zinnen die gegenereerd zijn door clausule (1), zijn zinnen van de categorische logica.

Definitie 1.1.1 bepaalt welke sequenties van woorden een zin vormen van de categorische logica (clausule 1), maar ook welke sequenties van woorden *geen* zin vormen van de categorische logica (clausule 2). Zo is de sequentie ABi geen zin in de categorische logica, maar de sequentie AiB wel.

1.2 Semantiek

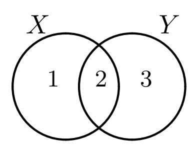
We weten nu welke woorden en zinnen tot de taal van de categorische logica behoren en welke niet. Maar we hebben nog niet aangegeven wat iedere zin betekent.

1.2.1 Venn-diagrammen

We gaan de betekenis van zinnen duidelijk maken aan de hand van schema's die *Venn-diagrammen* heten. We beginnen met de betekenis van termen. De betekenis van een term bestaat uit alle (en alleen die) elementen die de door de term uitgedrukte eigenschap bezitten. Een voorbeeld is de term A, die hier de eigenschap appel-zijn uitdrukt. De betekenis van A is dus alle (en alleen die) dingen die een appel zijn.[1]

In een Venn-diagram wordt (de betekenis van) een term weergegeven door een cirkel. Elementen die zich binnen de cirkel bevinden hebben de door de term uitgedrukte eigenschap. Deze elementen zijn dus onderdeel van de betekenis van die term. Een element kan meerdere eigenschappen bezitten en kan dus ook in meerdere cirkels aanwezig zijn. Een voorbeeld is een rode appel. Dit element bezit zowel de eigenschap 'rood' als 'appel'. Onder de toekenning van de termen R en A komt dit element zowel in de cirkel die (de betekenis van) de term R weergeeft, alsook in de cirkel die (de betekenis van) de term A weergeeft voor. Dat kan alleen als de cirkels voor R en A elkaar overlappen en de rode appel zich in de overlap bevindt.

Een zin bevat altijd twee termen (zie de definitie van de syntaxis in de vorige sectie). Het Venn-diagram van (de betekenis van) een zin bestaat daarom altijd uit twee elkaar overlappende cirkels, waardoor er drie gebieden ontstaan. Voor twee willekeurige termen X en Y ziet het Venn-diagram er als volgt uit:



In een Venn-diagram wordt de betekenis van een zin weergegeven, door voor elk gebied aan te geven of er elementen in mogen en/of moeten zitten, om de zin waar te laten zijn. Om de betekenis op transparante wijze uit te drukken, moeten we de Venn-diagrammen eenduidig tekenen. Hiervoor gebruiken we de volgende drie regels bij het invullen van de gebieden:

Arceren: Wanneer een gebied geen elementen mag bevatten, omdat de zin dan onwaar zou zijn, arceren we dat gebied.

Wit: Wanneer een gebied wel elementen mag bevatten, laten we dat gebied wit.

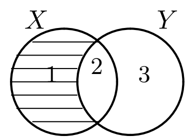
Kruisje: Wanneer een gebied ten minste één element *moet* bevatten om de zin waar te laten zijn, tekenen we in dat gebied een kruisje.

1.2.2 Betekenis van zinnen

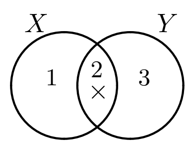
We kunnen nu aan de hand van Venn-diagrammen de betekenis van de zinnen in de categorische logica duidelijk maken. We doen dit door vier diagrammen te geven, één voor elke logische constante. In de voorbeelden schrijven we X en Y voor de niet-logische constanten, maar het is duidelijk dat we op deze manier identieke beschrijvingen van de betekenis kunnen gegeven voor alle niet-logische constanten.

[1] We gebruiken hier een *extensionele* notie van betekenis. Er bestaan ook andere noties van betekenis die hier niet behandeld zullen worden.

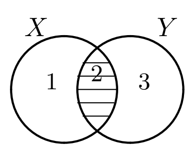
De zin XaY betekent dat alle objecten die de eigenschap uitgedrukt door X hebben, ook de eigenschap uitgedrukt door Y hebben. Er mag zich dus niets in gebied 1 bevinden, wat daarom gearceerd is. De zin XaY heeft dezelfde betekenis als de zin in natuurlijke taal "Alle X zijn Y", waar voor X en Y willekeurige termen ingevuld kunnen worden.



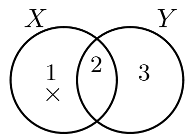
De zin XiY betekent dat er ten minste één element met de eigenschap X is dat ook de eigenschap Y heeft. Gebied 2 bevat daarom een kruisje. We weten niet of er daarnaast ook nog elementen met alleen eigenschap X (en niet eigenschap Y) zijn – voor de waarheid van de zin maakt dat niets uit. Daarom laten we gebied 1 wit. Hetzelfde geldt voor gebied 3. De zin XiY heeft dezelfde betekenis als de zin in natuurlijke taal "Sommige X zijn Y", waar voor X en Y willekeurige termen ingevuld kunnen worden.



De zin XeY betekent dat er geen elementen zijn die zowel eigenschap X als Y hebben. Gebied 2 is daarom gearceerd. In de andere twee gebieden mogen wel elementen zitten. De zin XeY heeft dezelfde betekenis als de zin in natuurlijke taal "Geen X is Y", waar voor X en Y willekeurige termen ingevuld kunnen worden.



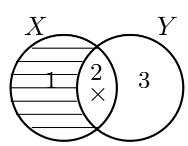
De zin XoY betekent dat er ten minste één element is dat wel de eigenschap uitgedrukt door X, maar niet de eigenschap uitgedrukt door Y heeft. Gebied 1 bevat dan ook een kruisje. Gebieden 2 en 3 mogen wel elementen bevatten; of er een element zit maakt voor de waarheidswaarde van de zin niets uit. Deze gebieden laten we daarom wit. De zin XoY heeft dezelfde betekenis als de natuurlijke taal zin "Sommige X zijn niet Y", waar voor X en Y willekeurige termen ingevuld kunnen worden.



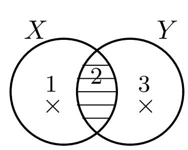
1.2.3 Existentiële import

Naast de betekenis van de zinnen houden we rekening met een vooronderstelling waarmee we bepaalde situaties (bepaalde Venn-diagrammen) al van te voren uitsluiten: het *postulaat van existentiële import*. Dit postulaat stelt dat voor iedere term die in een zin voorkomt, er ten minste één object met de door die term uitgedrukte eigenschap moet zijn. Voor Venn-diagrammen betekent dit dat elke cirkel ten minste één wit (ongearceerd) gebied moet hebben. Het betekent ook dat, wanneer een cirkel slechts één wit gebied heeft, we er een kruisje zetten: er moet dan een element zitten.

Samen met het postulaat van existentiële import verschaft een zin soms meer informatie dan op grond van de betekenis van de zin alleen. De zin XaY, bijvoorbeeld, leert ons niet alleen dat gebied 1 geen elementen bevat (zie bovenstaand Venn-diagram), maar ook dat gebied 2 wèl een element moet bevatten. Want als gebied 2 geen elementen zou bevatten, dan zou geen enkel element de eigenschap X hebben, in strijd met het postulaat van existentiële import. De situatie die de zin XaY waar maakt en bovendien voldoet aan het postulaat van existentiële import, is weergegeven in onderstaand Venn-diagram.



Evenzo verschaft de zin XeY, samen met het postulaat van existentiële import, meer informatie dan op grond van alleen de semantiek. Als er namelijk geen elementen in gebied 2 mogen zitten, dan moet er wel een element in gebied 1 zitten, en een element in gebied 3, om aan het postulaat van existentiële import te voldoen. Dit is weergegeven in onderstaand Venn-diagram.



1.2.4 Logische relaties tussen zinnen

We hebben nu de vier soorten zinnen, waaruit de categorische taal bestaat, geïntroduceerd. Op basis van hun betekenis hebben deze vier soorten zinnen *logische relaties* met elkaar. Deze relaties tussen typen zinnen worden in het zogeheten *oppositievierkant* weergegeven (zie figuur 1.1).

$$
\begin{tikzcd}
XaY \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Contrair}"] \arrow[ddrr, leftrightarrow] & & XeY \arrow[ddll, leftrightarrow] \\
& \text{Contradictoir} & \\
XiY \arrow[uu, "\text{Subaltern}"] \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Subcontrair}"'] & & XoY \arrow[uu, "\text{Subaltern}"']
\end{tikzcd}
$$

Figuur 1.1: Oppositievierkant

We geven eerst deze definitie van de vier typen relaties, en laten dan zien dat de vier soorten zinnen inderdaad gerelateerd zijn zoals weergegeven in het oppositievierkant.

Definitie 1.2.1. Zij φ en ψ twee categorische zinnen.

- φ is *contradictoir* met ψ desda[2] φ en ψ altijd verschillende waarheidswaarden hebben.
- φ is *contrair* met ψ desda φ en ψ niet tegelijk waar kunnen zijn.
- φ is *subcontrair* met ψ desda φ en ψ niet tegelijk onwaar kunnen zijn.
- φ is *subaltern* t.o.v. ψ desda, wanneer ψ waar is, ook φ waar moet zijn.

Aan de hand van deze definitie, en de aanname van de existentiële import, kunnen we zelf bewijzen dat het volgende geldt (dit zijn precies de relaties weergegeven in het oppositievierkant):

Lemma 1.2.2.

(i) Elke XaY-zin is contradictoir met de corresponderende XoY-zin.

[2]Het woord 'desda' is een afkorting van de frase "dan, en slechts dan, als", die in de logica vaak wordt gebruikt. In het Engels gebruikt men 'iff' wat staat voor "if and only if".

(ii) *Elke XeY-zin is contradictoir met de corresponderende XiY-zin.*

(iii) *Elke XaY-zin is contrair met de corresponderende XeY-zin.*

(iv) *Elke XiY-zin is subcontrair met de corresponderende XoY-zin.*

(v) *Elke XiY-zin is subaltern t.o.v. de corresponderende XaY-zin.*

(vi) *Elke XoY-zin is subaltern t.o.v. de corresponderende XeY-zin.*

We geven hier het bewijs voor stelling 1.2.2(i). Om iets te bewijzen voor elk paar van een *a*- en een *o*-zin, nemen we een willekeurig paar van een *a*- en een *o*-zin, te weten de zin XaY en de zin XoY. Een zin is *willekeurig* (of 'arbitrair') wanneer de betekenis van de niet-logische constanten (de termen) er niet toe doet. Anders gezegd, we kiezen de zin zodanig dat we er niets over weten, behalve de logische structuur (namelijk of het een *a*-, *e*-, *i*- of *o*-zin is). Alles wat we kunnen bewijzen over dergelijke willekeurige zinnen, moet dan wel voor alle zinnen met diezelfde structuur gelden.

Om te bewijzen dat de zinnen XaY en XoY contradictoir zijn, stelling 1.2.2(i), moeten we laten zien dat de zinnen altijd verschillende waarheidswaarden hebben, oftewel:

$$\text{Als } XaY \text{ waar is, dan is } XoY \text{ onwaar.} \tag{1.1}$$

$$\text{Als } XoY \text{ onwaar is, dan is } XaY \text{ waar.} \tag{1.2}$$

Bewijs. We bewijzen eerst (1.1) en vervolgens (1.2)

Stel dat XaY waar is. Dit betekent dat alle objecten die eigenschap X hebben, ook eigenschap Y hebben (de betekenis van XaY, zie blz. 4 e.v.). Hieruit volgt dat er geen elementen zijn die wel eigenschap X maar niet eigenschap Y hebben. Stel nu dat XoY eveneens waar is. Dit betekent dat er ten minste één x is die wel X maar niet Y is (zie blz. 4 e.v.). Maar deze x bestaat niet wanneer XaY waar is. We concluderen dat als XaY waar is, dat dan XoY onwaar is.

Stel dat XoY onwaar is. Dan is er géén element x dat wel eigenschap X heeft, maar niet eigenschap Y (zie blz. 4 e.v.). Maar dan zijn alle elementen die X zijn ook Y. Dan is dus de zin XaY waar. Dus als XoY onwaar is, dan is XaY waar.

Zodoende zien we dat XaY en XoY altijd tegengestelde zijn in termen van waarheid. Ze voldoen daarmee aan de definitie voor contradictoire zinnen. Omdat we van willekeurige *a*- en *o*-zinnen uitgingen, geldt deze conclusie voor alle zinnen van deze soort, ongeacht de betekenis van de termen. □

Opgave 1. *Wat blijft er over van het oppositievierkant als we het postulaat van existentiële import laten vallen?*

1.2.5 Natuurlijke taal-vertalingen

Om een zin uit de natuurlijke taal naar een zin in de categorische logica te vertalen, moeten we eerst alle beschrijvingen van eigenschappen in de natuurlijke taal vervangen door termen. In de natuurlijke taal worden eigenschappen beschreven door intransitieve werkwoorden (b.v. 'glimmen'), bijvoeglijke naamwoorden (b.v. 'groen') en soortnamen (b.v. 'huis'). Eén term in de categorische logica kan een beschrijving bestaande uit meerdere woorden uit de natuurlijke taal vertalen. Bijvoorbeeld 'handelingen die goede consequenties maximeren' kan worden vertaald met de term H (of met elke andere willekeurige term).

Wanneer we zinnen uit de categorische logica naar de natuurlijke taal vertalen, en vice versa, moeten we daarbij aangeven wat de vertalingen voor de afzonderlijke termen zijn. Aangezien de logische constanten altijd dezelfde vertaling hebben, hoeven we deze niet te specificeren. De vertalingen voor de termen die in een zin voorkomen noemen we samen de *vertaalsleutel* voor die zin. Er volgen nu een aantal voorbeeld van vertalingen van natuurlijke taal-zinnen in de categorische logica.

(1)	Natuurlijke taal-zin:	"Alle mensen zijn sterfelijk."
	Vertaalsleutel:	M: mensen
		S: sterfelijke wezens
	Vertaling:	MaS

(2)	Natuurlijke taal-zin:	"Sommige Drenthenaren zijn automobilisten."
	Vertaalsleutel:	D: Drenthenaren
		A: automobilisten
	Vertaling:	DiA

(3)	Natuurlijke taal-zin:	"Geen politicus durft op te komen voor de rechten van minderheden."
	Vertaalsleutel:	P: politici
		M: mensen die durven op te komen voor de rechten van minderheden
	Vertaling:	PeM

Soms is het niet meteen duidelijk hoe een zin in de categorische logica moet worden vertaald. Stel, bijvoorbeeld dat we de zin in (4) willen vertalen.

(4) Alleen mensen zijn filosofen.

Hoe kunnen we het woord *alleen* in de taal van de categorische logica uitdrukken? We kijken eerst naar de betekenis van de zin. *Alleen mensen zijn filosofen* betekent dat alle filosofen mensen zijn. Dus met de vertaalsleutel M: mens en F: filosoof is deze zin te vertalen als

(5) FaM

Er is in feite een hele lijst van uitdrukkingen in het Nederlands die vertaald kunnen worden met XaY. Tabel 1.1 geeft enkele voorbeelden. Hetzelfde geldt ook voor de andere drie zinsvormen van de categorische logica XiY, XeY en XoY. (Tabel 1.1 geeft ook enkele voorbeelden voor XeY.) Deze variatie maakt het moeilijker om de juiste vertaling voor een redenering te vinden.

Verschillende manieren om *alle X zijn Y* uit te drukken	Verschillende manieren om *geen X is Y* uit te drukken
X'en zijn Y.	*X'en zijn geen Y.*
Iedereen die X is is Y.	*Iedereen die X is is niet Y.*
Als je X bent, ben je ook Y.	*Als je X bent, ben je niet Y.*
Wie X is, is Y.	*Wie X is, is geen Y.*

Tabel 1.1: Vertalingen van XaY en XeY

Opgave 2. *Vertaal de volgende zinnen in een categorische taal. Geef ook de vertaalsleutel.*

(i) *Alleen vrije handelingen kunnen rechtvaardig gestraft worden.*

(ii) *Sociaal nuttige handelingen zijn juist.*

(iii) *Niet alle handelingen zijn voorbestemd.*

(iv) *Alleen rijkelui zijn gelukkig*

(v) *Altruïsten zijn gelukkig.*

(vi) *Niemand behalve een filosoof is wijs.*

(vii) *Niemand is gelukkig, tenzij hij rijk is.*

1.2.6 Naamgeving

De termen en zinnen in de categorische logica hebben bepaalde kenmerken. Deze kunnen we benoemen aan de hand van een conventionele naamgeving. We geven nu deze naamgeving voor afzonderlijke termen en zinnen.

Definitie 1.2.3 (Naamgeving van afzonderlijke termen)**.** Zij $X \bullet Y$ een zin van de categorische logica. We noemen de term X aan de linkerkant van de logische constante de *subjectterm.* De term Y aan de rechterkant van de logische constante noemen we de *predikaatterm.*

We introduceren nu twee eigenschappen van zinnen in de categorische logica. Deze eigenschappen stellen ons vervolgens in staat om zinstypen te onderscheiden.

Definitie 1.2.4 (Naamgeving van afzonderlijke zinnen)**.** Zij φ een zin van de categorische logica.

(1) We zeggen dat φ *affirmatief* of *bevestigend* is als de logische constante die in φ voorkomt a of i is. We zeggen dat φ *negatief* of *ontkennend* is als de logische constante die in φ voorkomt e of o is. Of een zin φ affirmatief danwel negatief is noemen we de *kwaliteit* van de zin.

(2) We zeggen dat φ *universeel* is als de logische constante die in φ voorkomt a of e is. We zeggen dat φ *particulier* is als de logische constante die in φ voorkomt i of o is. Of een zin φ universeel danwel particulier is noemen we de *kwantiteit* van de zin.

Met deze onderscheidingen kunnen we de volgende typen zinnen identificeren:

Universeel affirmatief zinnen zijn zinnen van de vorm XaY.

Particulier affirmatief zinnen zijn zinnen van de vorm XiY.

Universeel negatief zinnen zijn zinnen van de vorm XeY.

Particulier negatief zinnen zijn zinnen van de vorm XoY.

Sinds de Middeleeuwen noemt men deze soorten zinnen ook wel *a*-, *i*-, *e*-, en *o*-zinnen, naar respectievelijk de eerste klinker dan wel tweede klinker in de woorden '**a**ff**i**rmo', en 'n**e**g**o**'. Dit verklaart waarom we juist deze vier letters hebben gekozen voor de logische constanten: deze letters kunnen als ezelsbruggetje dienst doen.

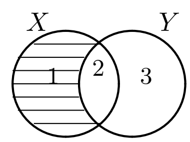
1.2.7 Semantiek in termen van verzamelingen

In de vorige secties hebben wij de semantiek van de taal van de categorische logica duidelijk gemaakt aan de hand van Venn-diagrammen. In de wiskunde worden Venn-diagrammen gebruikt om verzamelingen en hun logische relaties grafisch te representeren. In deze sectie zullen wij de semantiek van de categorische logica taal expliciet definiëren aan de hand van de notatie van de verzamelingenleer (lees hoofdstuk 2.1 voor een introductie).

De betekenis van termen zal worden geïdentificeerd met een verzameling, de verzameling van de entiteiten die de door de term uitgedrukte eigenschap bezitten. Bij voorbeeld, als de term A de eigenschap appel-zijn uitdrukt, dan bestaat de betekenis van A uit de verzameling $\mathbf{A} = \{a \mid a \text{ is een appel}\}$. Wij zullen $\mathbf{X}$ gebruiken om naar de verzameling te verwijzen die de betekenis van de term X aangeeft. De betekenis van onze vier categorische zinnen kan dan als volgt wordt gedefinieerd.

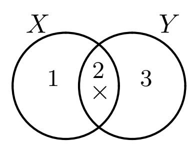
De zin XaY betekent dat alle objecten die de eigenschap uitgedrukt door X hebben, ook de eigenschap uitgedrukt door Y hebben. Maar dat wil zeggen dat **X** een deelverzameling van **Y** is, of 'equivalently' dat het complement van **Y** gegeven **X** (gebied 1) leeg is.

- XaY betekent dat $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ (of $\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \varnothing$)



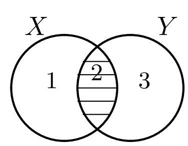
De zin XiY betekent dat er ten minste één element met de eigenschap X is dat ook de eigenschap Y heeft. In termen van de verzamelingenleer betekent dit, dat de doorsnede van **X** en **Y** (gebied 2) niet leeg is:

- XiY betekent dat $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \varnothing$



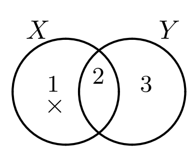
De zin XeY betekent dat er geen elementen zijn die zowel eigenschap X als Y hebben, d.w.z. dat de doorsnede van **X** en **Y** (gebied 2) wel leeg is:

- XeY betekent dat $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \varnothing$



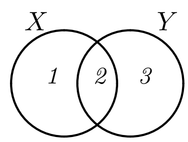
De zin XoY betekent dat er ten minste één element is dat wel de eigenschap uitgedrukt door X, maar niet de eigenschap uitgedrukt door Y heeft, d.w.z. dat het complement van **Y** gegeven **X** (gebied 1) niet leeg is.

- XoY betekent dat $\mathbf{X} - \mathbf{Y} \neq \varnothing$

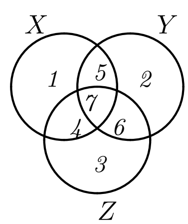


Opgave 3. *De gebieden 1, 2 en 3 in het volgende Venn-diagram corresponderen met de volgende verzamelingen:*

$$1 \mapsto \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$
$$2 \mapsto \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$$
$$3 \mapsto \mathbf{Y} - \mathbf{X}$$



Beschouw nu het volgende Venn-diagram waarin drie termen worden weergegeven X, Y en Z. Met welke verzamelingen corresponderen de gebieden 1, 4 en 7?



1.3 Redeneringen

In de vorige sectie hebben we de taal van de categorische logica geïntroduceerd. In deze sectie gaan we in die taal redeneringen formuleren. We zullen zien dat de categorische logica ons in staat stelt om op een heel specifieke manier deze redeneringen te bestuderen. En dat is ook meteen de verklaring waarom we deze taal hebben geformuleerd. Zoals de wiskunde een taal formuleert waarin berekeningen bestudeerd kunnen worden, zo formuleert de categorische logica een taal waarin (sommige) redeneringen bestudeerd kunnen worden.

1.3.1 Redeneringen opbouwen uit zinnen

Zoals zinnen uit woorden bestaan, zo bestaan redeneringen uit zinnen. Een redenering is uiteindelijk niets meer dan een opeenvolging van zinnen.[3] Als het niet anders is aangegeven, gaan we ervan uit dat de laatste zin van een redenering de conclusie is, en die is onderscheiden door een schuine streep.

[3] In ons geval zinnen van de categorische logica.

Definitie 1.3.1 (Redenering)**.** Zij $\varphi_1 \ldots \varphi_n, \psi$ zinnen van de categorische logica. Dan is $\varphi_1 \ldots \varphi_n/\psi$ een *redenering*.[4]

We zullen de conventie hanteren dat we alle zinnen in een redenering behalve de *conclusie* achter de streep, een *premisse* noemen.[5] Zoals zinnen de eigenschap kunnen hebben *waar* of *onwaar* te zijn, kunnen redeneringen de eigenschap hebben *geldig* of *ongeldig* te zijn. Hiermee bedoelen we dat de conclusie logisch volgt uit de premissen. We zullen in Sectie 1.4 precies vastleggen wat we verstaan onder *geldigheid*.

Allereerst onderscheiden we redeneringen die uit verschillende aantallen premissen bestaan.

Definitie 1.3.2 (Logische wet)**.** Zij φ een zin van de categorische logica. Dan is $/\varphi$ een redenering met nul premissen welke we een *logische wet* zullen noemen, als die conclusie inderdaad zonder premissen geldig is.

Definitie 1.3.3 (Onmiddelijke gevolgtrekking)**.** Zij φ, ψ zinnen van de categorische logica. Dan is φ/ψ een redenering met één premisse welke we een *onmiddelijke gevolgtrekking* zullen noemen.

Definitie 1.3.4 (Middelijke gevolgtrekking)**.** Zij φ, ψ, χ zinnen van de categorische logica. Dan is $\varphi, \psi/\chi$ een redenering welke we een een *middelijke gevolgtrekking* zullen noemen.

We geven een voorbeeld van een redenering met twee premissen:

	Premisse 1	Alle Drenthenaren zijn doedelzakspelers.
(6)	Premisse 2	Alle automobilisten zijn Drenthenaren.
	Conclusie	Alle automobilisten zijn doedelzakspelers.

We kunnen op basis van redeneringen met twee premissen ook redeneringen met meer dan twee premissen beschrijven. We kunnen namelijk de conclusie van een redenering gebruiken als premisse in een volgende redenering. Dit zal in sectie 1.4.5 aan bod komen.

1.3.2 Syllogismen

Als we het hebben over middellijke gevolgtrekkingen zullen wij ons beperken tot een bijzondere deelverzameling van deze redeneringen: de *syllogismen*. Dit zijn specifieke rederingen met twee premissen zoals bijvoorbeeld (6).

[4] We gebruiken soms een verticale en soms een horizontale notatie voor redeneringen. φ/ψ is een voorbeeld van een horizontale notatie. Diezelfde redenering ziet er in verticale notatie als volgt uit: $\frac{\varphi}{\psi}$

[5] In natuurlijke redeneervormen hoeft de conclusie natuurlijk niet altijd de afsluiting te zijn. Soms begint men met een conclusie om er dan vervolgens motivatie voor te geven in de vorm van premissen die beginnen met "want ...."

Definitie 1.3.5 (Syllogisme)**.** *Syllogismen* zijn redeneringen met twee premissen en een conclusie, waar drie termen in optreden, alle drie twee maal, geen enkele twee maal in dezelfde zin, en elk telkens gepaard aan een andere.

De vertaling van (6) in de categorische taal is als volgt, waar D_1 staat voor Drenthenaren, D_2 voor doedelzakspelers, en A voor automobilisten:

	Premisse 1	D_1aD_2
(7)	Premisse 2	AaD_1
	Conclusie	AaD_2

Aangezien een syllogisme uit drie categorische zinnen bestaat, komen er op zes plaatsen termen voor. In een syllogisme mogen dit maximaal drie verschillende termen zijn. Deze drie termen hebben ieder hun eigen benaming.

De predikaatterm van de conclusie van een syllogisme heet de *majorterm* van dat syllogisme (in (7) is dit D_2). De premisse waarin de majorterm optreedt wordt de *majorpremisse* te genoemd (in (7) is dit de eerste premisse). De subjectterm van de conclusie heet de *minorterm* van de redenering (in (7) is dit A). De premisse waarin de minorterm optreedt heet de *minorpremisse* (in (7) is dit de tweede premisse). De derde term, die overblijft, heet de *middenterm* (in (7) is dit D_1). Deze komt in beide premissen voor.[6]

Het is algemeen gebruik om syllogismes op een specifieke manier te presenteren, omdat ze daardoor eenvoudiger te bespreken zijn. In de eerste plaats laten we de premissen dan inderdaad aan de conclusie vooraf gaan, en ook presenteren we de majorpremisse als eerste premisse, en de minorpremisse als de tweede premisse.[7] Dit leidt tot de volgende definitie van de standaardvorm van een syllogisme.

Definitie 1.3.6 (Syllogisme in de Standaardvorm)**.** Een *syllogisme in de standaardvorm* is een redenering van de vorm $\varphi, \psi/\chi$, waarbij:

- de predikaatterm van χ (de majorterm) in φ voorkomt,
- de subjectterm van χ (de minorterm) in ψ voorkomt, en
- de resterende middenterm in zowel φ als ψ voorkomt.

Onder de aanname dat syllogismes in de standaardvorm staan, kunnen ze op eenvormige wijze geclassificeerd worden, en, zoals we zullen zien, kan aan de hand daarvan vervolgens hun logische geldigheid bepaald worden. Als niet anders is aangegeven, praten we in het vervolg alleen nog over syllogismes in de standaardvorm.

[6] De reden dat Aristoteles de majorterm 'de grotere', de middenterm 'de middelste', en de minorterm 'de kleinere' noemt is gelegen in het feit dat de extensies van die termen zich in de zogenaamde perfecte syllogismen (die van de vorm *aaa*-1, cf. Sectie 1.4.4), zich zo verhouden als de namen suggereren. In andere syllogismen kan die verhouding heel anders liggen, ook al blijft de naamgeving gehandhaafd.

[7] Logische gesproken vormt deze praktijk geen beperking van het systeem van de categorische logica, want de volgorde van de premissen maakt voor een logische gevolgtrekking niet uit. In Sectie 1.4 zal duidelijk worden waarom de volgorde van de premissen er niet toe doet.

Naamgeving van redeneringen

Twee kenmerken van een syllogisme zijn bepalend voor de geldigheid ervan. Allereerst natuurlijk de logische constanten die erin voorkomen, en deze vormen de *modus* van een syllogisme. In de tweede plaats is het natuurlijk van belang op welke manier de verschillende termen (subjectterm, predikaatterm, en middenterm) in de drie zinnen van een syllogisme door de logische constanten verbonden worden. Dit wordt gekarakteriseerd door de zogeheten *figuur* van een syllogisme.

Aannemend dat een syllogisme in de standaardvorm staat, kunnen we door een opeenvolging van drie logische constanten aangeven welke logische constanten het connectief zijn in respectievelijk de majorpremisse, de minorpremisse en de conclusie. De modus van het syllogisme bestaat uit de opeenvolging van de drie logische constanten van de drie zinnen.

Definitie 1.3.7 (Modus van een syllogisme)**.** Zij $\varphi, \psi/\chi$ een syllogisme in de standaardvorm. En zij u, v, w respectievelijk de logische constanten van φ, ψ en χ. Dan is *uvw* de *modus* van het syllogisme.

Zo zijn de zinnen in redenering (7) alle drie a-zinnen. Dit betekent dus dat het syllogisme de modus *aaa* heeft. We spreken ook wel over een (*aaa*)-syllogisme.

Nog steeds aannemend dat een syllogisme in de standaardvorm staat zijn er maar vier soorten, of *figuren*, van syllogismes met een bepaalde modus. In (7) is de middenterm van de redenering de subjectterm van de majorpremisse en de predikaatterm van de minorpremisse. In andere redeneringen kan deze verdeling van de subject-, predikaat- en minorterm in de premissen andersom zijn. Voor syllogismes met de modus *uvw* levert dit de volgende vier mogelijke figuren op, waarbij X, Y, en Z de rol van respectievelijk de minorterm, majorterm en middenterm spelen.

Definitie 1.3.8 (Figuur van een syllogisme)**.** De figuur (1, 2, 3 of 4) van een syllogisme is gegeven door de wijze waarop de middenterm over de twee premissen verdeeld is, en wel als volgt:

$$\begin{array}{c} Z\,u\,Y \\ X\,v\,Z \\ \hline X\,w\,Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} Y\,u\,Z \\ X\,v\,Z \\ \hline X\,w\,Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} Z\,u\,Y \\ Z\,v\,X \\ \hline X\,w\,Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} Y\,u\,Z \\ Z\,v\,X \\ \hline X\,w\,Y \end{array}$$

1e figuur   *2e figuur*   *3e figuur*   *4e figuur*

(De lijnen die hierboven door de verschillende configuraties getrokken zijn, vormen samen een soort van 'W'. Dit kan wellicht dienst doen als een geheugensteuntje.)

Syllogisme (7) is een voorbeeld van een *aaa*-syllogisme van de eerste figuur. De *vorm* van een syllogisme met modus *uvw* en figuur *i* wordt aangegeven als $uvw{-}i$. De vorm van syllogisme (7) is derhalve $aaa{-}1$.

Nu we weten wat de modus en figuur van een syllogisme zijn kunnen we inzien dat er 256 verschillende vormen voor syllogismen zijn. Ga dit na!

Opgave 4. *Ga na welke van de volgende redeneringen syllogismen in de standaardvormzijn. Geef, daar waar mogelijk, modus en figuur van het syllogisme aan.*

(i) *Alle A zijn niet L. Alle M zijn L. Sommige N zijn M. Alle Z zijn N. Dus, alle A zijn Z.*

(ii) *Alle A zijn niet L. Alle M zijn L. Geen M is een A.*

(iii) *Geen Y is E. Alle G zijn Y. Dus, sommige Y zijn niet E.*

(iv) *Geen P is B. Sommige C zijn B. Dus, sommige C zijn niet P.*

1.3.3 Natuurlijke taal-vertalingen

Om met behulp van categorische logica redeneringen te kunnen bestuderen, moeten we een redenering vertalen. Hiervoor moeten we eerst de afzonderlijke zinnen waaruit de redenering is opgebouwd vertalen. Dit hebben we besproken in Sectie 1.2.5.

Voor het vertalen van een redenering als geheel gebruiken we één vertaalsleutel. Deze moet dus hetzelfde zijn voor alle zinnen binnen die redenering. Als voorbeeld vertalen we de volgende redenering uit de natuurlijke taal:

(8) *Sommige morele kwesties zijn controversiële vraagstukken. Geen controversieel vraagstuk heeft een correct antwoord. Dus, sommige morele kwesties hebben geen correct antwoord*

We gebruiken hierbij de volgende vertaalsleutel:

(9)	Vertaalsleutel:	M:	morele kwesties
		C:	controversiële vraagstukken
		V:	vraagstukken die een correct antwoord hebben

Op basis van deze vertaalsleutel wordt de redenering als volgt vertaald in de taal van de categorische logica:

(10)	Premisse 1	MiC
	Premisse 2	CeV
	Conclusie	MoV

Opgave 5. *Vertaal de volgende redeneringen naar de categorische logica. Geef aan wat de premissen en de conclusie zijn. Geef ook de vertaalsleutel aan. Zijn de redeneringen volgens uw intuïties geldig of ongeldig?*

(i) Alle Grieken zijn leugenaars. Alle Grieken zijn mensen. Dus alle mensen zijn leugenaars.

(ii) Geen Nederlander jonger dan 18 jaar heeft kiesrecht. Geen medewerker van het departement Wijsbegeerte is jonger dan 18 jaar. Dus alle medewerkers van het departement Wijsbegeerte hebben kiesrecht.

(iii) Alle morele overtuigingen zijn het product van de samenleving. Geen product van de samenleving geeft uitdrukking aan een objectieve waarheid. Dus geen morele overtuiging geeft uitdrukking aan een objectieve waarheid.

1.4 Geldigheid

Zoals al eerder opgemerkt zeggen we van redeneringen niet dat ze waar zijn, maar dat ze *geldig* zijn. We definiëren wat we daar mee bedoelen.[8]

Definitie 1.4.1 (Geldigheid)**.** Zij $P_1, \ldots, P_n/C$ een redenering. We zeggen dat een redenering *geldig* is desda in alle gevallen waarin de premissen waar zijn ook de conclusie waar is.[9]

Deze definitie geldt voor alle redeneringen en bij implicatie dus ook voor de syllogismen.

Voorbeeld 1.4.2. Zie onderstaand syllogisme van de vorm *(iai-3)*.

(11)

Sommige ministers zijn corrupt.
Alle ministers zijn competent.

Sommige competente mensen zijn corrupt.

We zien dat *als* we de waarheid van de premissen aannemen we ook de waarheid van de conclusie moeten accepteren. We zien ook dat mochten we (11) herschrijven met andere termen de conclusie nog steeds volgt. Het syllogisme is geldig op grond van zijn vorm. We zullen deze notie in wat volgt verder uitwerken.

In Sectie 1.3 hebben we gedefinieerd welke redeneringen we in de categorische logica onderscheiden. Maar niet alle redeneringen zijn geldig. We gaan nu de geldige van de ongeldige redeneringen onderscheiden. Dit is dus het eigenlijke doel waarvoor we al het formaliserende voorwerk hebben gedaan.

1.4.1 Logische wetten

Zoals we zagen bestaan redeneringen met nul premissen uit slechts één zin: de conclusie. Gegeven hoe wij geldigheid gedefiniëerd hebben volgt dat een redenering die enkel bestaat uit de conclusie geldig is desda de zin die de conclusie

[8] De lezer merke op dat we echter wel waarheid van zinnen gebruiken om geldigheid te definiëren.

[9] We zullen in Sectie 1.4.4 nog een andere notie van geldigheid onderscheiden.

vormt altijd waar is. Zulke zinnen worden ook *logische waarheden* genoemd. Een voorbeeld is XaX. In de logische traditie wordt wel naar deze logische waarheid als 'de wet der identiteit' verwezen.

Opgave 6. *Zijn de volgende zinnen volgens jou logische waarheden?*

(i) XiX

(ii) XeX

(iii) XoX

1.4.2 Onmiddellijke gevolgtrekkingen

Onmiddellijke gevolgtrekkingen zijn gevolgtrekkingen uit één premisse. We bespreken hier twee soorten onmiddellijke gevolgtrekkingen: subalternatie en conversie.

Subalternatie

Wanneer we kijken naar de logische relaties in het oppositievierkant, dan zien we dat alleen de *subaltern* relatie een geldige onmiddellijke gevolgtrekking behelst. Met andere woorden, uit de waarheid van XaY (premisse) volgt onmiddellijk de waarheid van XiY (conclusie), en uit de waarheid van XeY (premisse) volgt onmiddellijk de waarheid van XoY (conclusie). Bij subalternatie komt de aanname van existentiële import expliciet naar voren.

Conversie

Iedere zin in de categorische logica heeft een zogenaamde *converse* zin. Deze vind je door de subject- met de predikaatterm uit de oorspronkelijke zin te verwisselen. De converse van XaY is bijvoorbeeld YaX.

De vraag die we ons nu stellen is: voor welke soort van categorische zinnen geldt dat de converse ervan logisch volgt uit de zin zelf? Dit geldt voor i-zinnen en e-zinnen. Schematisch geven we dit weer in de gevolgtrekkingsschema's XiY/YiX en XeY/YeX.

De juistheid hiervan is onmiddellijk duidelijk gegeven de onderstaande Venndiagrammen in Figuur 1.2.

Neem aan dat de zin XiY waar is. Wanneer sommige X ook Y zijn, dan is er dus (ten minste) één element x dat zowel X als Y is. Maar dan is die x ook zowel Y als X (verwisseling van de volgorde van de eigenschappen). Maar dan is de zin YiX dus eveneens waar.

Neem aan dat de zin XeY waar is. Wanneer geen X tevens Y is, dan is er geen element in gebied 2 (zie de rechterfiguur). Wanneer er geen element is dat zowel X als Y is, dan is er ook geen element dat zowel Y als X is (verwisseling van de volgorde van de eigenschappen). Met andere woorden, YeX is waar.

XiY is waar desda YiX waar is $\quad$ XeY is waar desda YeX waar is

Figuur 1.2: Conversie van i en e zinnen.

Tegenvoorbeelden

Dat we uit de waarheid van een *a*- of *o*-zin niet zomaar tot de waarheid van de converse mogen besluiten blijkt uit onderstaande *tegenvoorbeelden*. Een tegenvoorbeeld illustreert waarom een bepaalde redenering niet geldig is. Een tegenvoorbeeld kan worden gegeven in de vorm van een Venn-diagram (zie Figuur 1.3). In een dergelijk Venn-diagram moeten de premissen waar zijn, maar de conclusie onwaar. Het tegenvoorbeeld laat dan zien dat de conclusie niet volgt uit de premissen. Want er is ten minste één situatie (afgebeeld in het tegenvoorbeeld) waarin dit niet het geval is.

XaY is waar, maar YaX is onwaar $\quad$ XoY is waar, maar YoX is onwaar

Figuur 1.3: Tegenvoorbeelden *a*- en *o*-zinnen.

Het linker-Venn-diagram is een tegenvoorbeeld voor de converse van *a*-zinnen. In het Venn-diagram is XaY waar, want alle elementen die eigenschap X hebben, hebben ook eigenschap Y. Maar zin YaX is in datzelfde diagram niet waar, want niet alle Y zijn tevens X. Het kruisje in gebied 3 geeft immers aan dat er (ten minste) één element x is dat wel Y is, maar niet X.

Het rechter Venn-diagram is een tegenvoorbeeld voor de converse van *o*-zinnen. In het Venn-diagram is XoY waar: sommige X zijn niet Y, aangegeven door het kruisje in gebied 1. Maar YoX is niet waar. Want er is geen element dat wel Y maar niet X is. Dit element zou zich in gebied 3 moeten bevinden, maar dit gebied bevat geen elementen blijkens de arcering.

1.4.3 Middellijke gevolgtrekkingen: syllogismen

Wij willen nu onderzoeken wanneer een *syllogisme* geldig is. Weer kunnen we misschien het beste uitgaan van een voorbeeld.

(12)

Alle dieren zijn levende wezens.
Alle mensen zijn dieren.

Alle mensen zijn levende wezens.

Dat deze redenering geldig is heeft er niets mee te maken dat de conclusie en de twee premissen waar zijn. Het gaat er om dat de conclusie wel waar *moet* zijn als de premissen dat zijn. De volgende redenering, met een onware conclusie gebaseerd op onware premissen, is evengoed een geldige redenering.

(13)

Alle Drenthenaren zijn doedelzakspelers.
Alle automobilisten zijn Drenthenaren.

Alle automobilisten zijn doedelzakspelers.

Als zinnen van de vorm “Alle Z zijn Y” en “Alle X zijn Z” allebei waar zijn, dan **moet** de zin “Alle X zijn Y” ook waar zijn, i.e., “Alle X zijn Y” is een logisch gevolg. $ZaY, XaZ/XaY$ is dus een geldig redeneerschema van de vorm *(aaa-1)*.

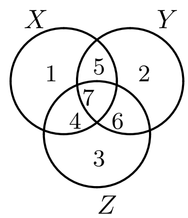
Een redeneerschema is een redenering waarin de niet-logische constanten (oftewel termen) arbitrair gekozen zijn. Door dit arbitraire karakter van de termen zijn de bewijzen die op de redenering van toepassing zijn, eveneens van toepassing op alle soortgelijke redeneringen. Soortgelijke redeneringen zijn redeneringen die alleen verschillen in de niet-logische constanten (of termen). De geldigheid van deze redenering zullen we zo meteen inzichtelijk maken aan de hand van een Venn-diagram.

Geldigheid middels Venn-diagrammen

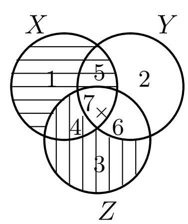
Dat een syllogisme geldig is kan duidelijk gemaakt worden met behulp van Venn-diagrammen. Het is niet de enige manier, maar voor velen meer intuïtief dan andere manieren. Hieronder staat schematisch beschreven hoe Venn-diagrammen kunnen worden gebruikt om geldigheid te bepalen.

> *Geldigheid middels Venn-diagrammen*
> Teken drie overlappende cirkels. Label elke cirkel met één van de termen in het syllogisme (zie onderstaande afbeelding). Geef dan zoals eerder besproken in het diagram aan wat de premissen bezeggen; doe dit alleen voor premissen, niet de conclusie. Het syllogisme is geldig desda van het resulterende diagram al af te lezen valt dat de conclusie waar is.

Venn-diagrammen waarin drie termen worden weergegeven bestaan uit 7 gebieden. In onderstaande afbeelding is elk gebied van een nummer voorzien om er makkelijk naar te kunnen verwijzen.



Hierboven hebben we beweerd dat ZaY, XaZ / XaY een geldig redeneerschema is. Dat dit ook daadwerkelijk het geval is, valt af te lezen aan het volgende Venn-diagram.



Volgens de majorpremisse ZaY ("Alle Z zijn Y") zijn er geen Z die niet Y zijn, dus er zijn geen elementen in de gebieden 3 en 4. Die gebieden zijn dus gearceerd. Volgens de minorpremisse XaZ ("Alle X zijn Z") zijn er geen X die niet Z zijn, dus er zijn geen elementen in de gebieden 1 en 5. Die gebieden zijn dus ook gearceerd. Dan blijven de gebieden 2, 6 en 7 over, waar mogelijk wel elementen zitten. In ieder geval zitten alle elementen die X zijn in gebied 7, als we existentiële import aan willen nemen.

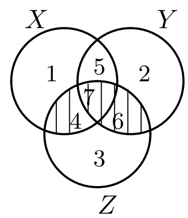
We hebben nu alleen de premissen getekend in het Venn-diagram. Wanneer we nu de conclusie eveneens van het Venn-diagram kunnen aflezen, moet deze dus waar zijn gegeven de waarheid van de premissen. Er is dan sprake van een geldige gevolgtrekking.

De conclusie is XaY (oftewel "Alle X zijn Y"). Dit betekent dat er geen X is die niet ook Y is, met andere woorden gebied 1 en 4 moeten leeg zijn. We zien in het Venn-diagram dat deze gebieden inderdaad al gearceerd zijn. Dit betekent dat XaY waar is gegeven de premissen. Met andere woorden: wat XaY stelt is al gezegd met de premissen ZaY en XaZ. Het is derhalve een logisch gevolg.

Een voorbeeld van een ongeldig syllogisme is *(eee-2)*.

(14) $$\frac{\begin{array}{c} YeZ \\ XeZ \end{array}}{XeY}$$

Ook dit kunnen wij laten zien aan de hand van een Venn-diagram. Voor de major premissen YeZ worden de gebieden 7 en 6 gearceerd (zie onderstaand Venn-diagram). Voor de minor premisse XeZ ook gebied 4 (gebied 7 is al gearceerd). Voor de conclusie XeY had ook het gebied 5 moeten zijn gearceerd. Dit is niet het geval. Dus, het syllogisme is niet geldig.



Zoals al eerder besproken geldt dat als een redenering niet geldig is een tegenvoorbeeld kan worden gegeven. Een tegenvoorbeeld is een concreet geval waarin de premissen waar zijn maar de conclusie fout. Tegenvoorbeelden kunnen ook in termen van Venn-diagrammen worden gegeven. Voor de redenering die net is besproken is het Venn-diagram een tegenvoorbeeld waarin boven op wat er al in het bovenstaande Venn-diagram gemarkeerd staat ook nog een kruisje staat in gebied 5. Dit geeft een diagram waarvan af te lezen valt dat beide premissen (YeZ en XeZ) waar zijn, maar bovendien is nu ook duidelijk dat de conclusie (XeY) onwaar is.
Wij geven nog een voorbeeld hoe tegenvoorbeelden met behulp van Venn-diagrammen kunnen worden getekend. We willen aantonen dat syllogismen van de vorm *(eoi-1)* ongeldig zijn, ook al zouden we existentiële import aannemen.

$$(15)\qquad \begin{array}{l} ZeY \\ XoZ \\ \hline XiY \end{array}$$

De eerste premisse in (15) staat ons toe om de gebieden 6 en 7 arceren. Ook moet er (existentiële import) een kruisje in 5 of 2 en in 4 of 3 worden geplaatst, maar het is niet duidelijk waar. Naar aanleiding van premisse 2 moet er een kruisje komen in gebied 1 of 5. Weer is niet duidelijk in welk gebied het kruisje moet komen. Van het resulterende Venn-diagram valt de conclusie niet af te lezen, dus de redenering is niet geldig.

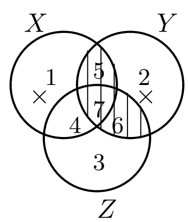
Nu willen wij voor dit redeneerschema een tegenvoorbeeld geven, dus een Venn-diagram waarin premissen waar zijn, maar de conclusie onwaar is. De conclusie XiY is waar desda er een kruisje in 5 of 7 staat. Om de conclusie onwaar te maken in het Venn-diagram moeten deze twee gebieden dus gearceerd zijn. 7 is al gearceerd vanwege de minorpremisse. Dus arceren wij nu nog gebied 5. Deze stap heeft gevolgen voor hoe wij de rest van het Venn-diagram in moeten vullen om de premissen waar te maken:

(1) Naar aanleiding van de eerste premisse moest er een kruisje komen in 5 of 2. Omdat nu 5 gearceerd is volgt dat er een kruisje in gebied 2 moet

staan.

(2) De tweede premisse stond ons toe om een kruisje in 1 of 5 te plaatsen. Omdat 5 gearceerd is komt het kruisje in 1.

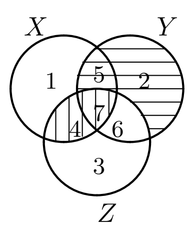
Het resulterende Venn-diagram geeft een tegenvoorbeeld voor de geldigheid van het syllogisme (*eoi-1)*: in dit diagram zijn de premissen beiden waar, maar de conclusie is onwaar, en voldoet aan existentïele import.



Een ander voorbeeld van een geldig syllogisme is de vorm *(aee-4)*.

$$
(16) \qquad \begin{array}{l} YaZ \\ \underline{ZeX} \\ XeY \end{array}
$$

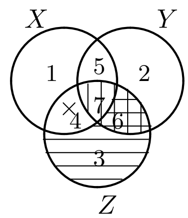
Neem aan dat beide premissen waar zijn. Op grond van de majorpremisse moeten we dan de gebieden 5 en 2 arceren. De minorpremisse stelt dat de gebieden 4 en 7 gearceerd moeten worden. De conclusie XeY blijkt eveneens waar te zijn, want gebieden 5 en 7 zijn gearceerd, dus geen X is Y.



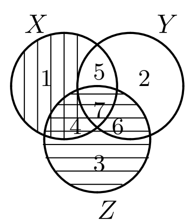
Een laatste voorbeeld: Ook syllogismen van de vorm *(eao-3)* zijn geldig, maar alleen als we existentiële import aannemen.

$$
(17) \qquad \begin{array}{l} ZeY \\ \underline{ZaX} \\ XoY \end{array}
$$

Bekijk het volgende Venn-diagram:



Op grond van de eerste premisse moeten we de gebieden 6 en 7 arceren. Op grond van de tweede premisse arceren we de gebieden 3 en 6. Nu plaatsen we een kruisje in gebied 4 (existentiële import). We zien dat de conclusie waar is in het Venn-diagram: sommige X zijn niet Y, namelijk het element dat door het kruisje in gebied 4 wordt weergegeven. Hadden we existentiële import niet aangenomen dan hadden we het volgende tegenvoorbeeld kunnen definiëren:



Opgave 7. *Bekijk de volgende drie redeneringen.*

1. *Sommige armoedzaaiers zijn egoïsten, want sommige kunstenaars zijn armoedzaaiers, en alle kunstenaars zijn egoïsten.*

2. *Sommige kaalhoofdigen zijn geen man want alle eigenzinnigen zijn kaalhoofdig en geen man is eigenzinnig.*

3. *Sommige boeken zijn een product van de samenleving. Sommige boeken verwoorden objectieve kennis. Dus, sommige producten van de samenleving verwoorden objectieve kennis.*

Maak voor elke redenering de onderstaande twee opdrachten.

(i) Schrijf dit syllogisme in de standaardvorm op. Wat is de modus en wat is de figuur?

(ii) Onderzoek de geldigheid van dit syllogisme met behulp van een Venn-diagram. Geef kort aan hoe u tot uw conclusie gekomen bent.

Er zijn 256 syllogistische vormen – bereken dit zelf – en van die 256 zijn er 24 geldig. We sommen ze op in Tabel 1.2.

(aaa-1)	*(aoo-2)*	*(oao-3)*	*(aee-4)*
(eae-1)	*(aee-2)*	*(aii-3)*	*(iai-4)*
(aii-1)	*(eae-2)*	*(iai-3)*	*(eio-4)*
(eio-1)	*(eio-2)*	*(eio-3)*	**(aai-4)**
(aai-1)	**(aeo-2)**	**(aai-3)**	**(aeo-4)**
(eao-1)	**(eao-2)**	**(eao-3)**	**(eao-4)**

Tabel 1.2: Alle geldige syllogistische vormen

Wanneer we het postulaat van existentiële import laten vallen, dan blijken er 9 syllogismen af te vallen. In Tabel 1.2 zijn deze syllogismen dik gedrukt.

Met de bovenstaande rijtjes hebben we heel wat oefenstof gekregen. We kunnen van alle syllogismen die in deze tabel voorkomen de geldigheid bewijzen met een Venn-diagram. We kunnen bovendien de ongeldigheid aantonen van alle syllogismen die niet in deze tabel voorkomen. En tenslotte kunnen we van de syllogismen die dik zijn gedrukt aantonen dat ze geldig zijn als het postulaat van existentiële import aangenomen wordt, en ongeldig als we dat postulaat laten vallen.

1.4.4 Reductie tot de perfecte syllogismen

Volgens Aristoteles waren de eerste vier syllogismen van de eerste figuur de enige waarvan de geldigheid zonder meer intuïtief is in te zien – die syllogismen worden daarom ook wel *perfect* genoemd. Hij achtte het dan ook zijn plicht om de geldigheid van de andere geldige syllogismen te verklaren op grond van de geldigheid van deze vier. Dit is hem ook gelukt: hij liet zien dat de geldigheid van elk niet-perfect syllogisme logisch af te leiden is uit één van de perfecte syllogismen met gebruikmaking van de onmiddellijke gevolgtrekkingsregels conversie en subalternatie, en de zogenaamde *reductio ad absurdum*-regel.

Stelling 1.4.3. *(Aristoteles) De geldigheid van elk syllogisme kan worden aangetoond door gebruik te maken van de volgende principes.*

1. *De vier perfect syllogismen:*
   (a) $MaP, SaM/SaP$ (aaa-1),
   (b) $MeP, SaM/SeP$ (eae-1),
   (c) $MaP, SiM/SiP$ (aii-1),
   (d) $MeP, SiM/SoP$ (eio-1),
2. *conversie:* XiY/YiX *en* XeY/YeX,
3. *subalternatie:* XaY/XiY *en* XeY/XoY,
4. *de* reductio ad absurdum-*regel.*

Hoe leid je de geldigheid van een willekeurig syllogisme af uit de bovenstaande principes? Een syllogisme is geldig desda de conclusie logisch volgt uit zijn premissen. We beginnen dus met de premissen van het syllogisme en proberen dan *slechts* door toepassing van de principes in Stelling 1.4.3 hieruit de conclusie af te leiden. Stel bijvoorbeeld dat we de geldigheid van *(eae-2)* willen afleiden gegeven Stelling 1.4.3.

Te bewijzen:

$$(18) \qquad \begin{array}{l} PeM \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \qquad \textit{(eae-2)}$$

We beginnen bij de *premissen* van (18).

1. PeM major premisse
2. SaM minor premisse

Met conversie (PeM/MeP) kunnen we concluderen dat als de major premisse waar is (PeM), ook de zin MeP waar moet zijn.

3. MeP Conversie toegepast op 1

De zin 3 samen met de minorpremisse 2 zijn de premissen van het perfect syllogisme *(eae-1)*. Als deze twee zinnen waar zijn moet dus ook de conclusie van dit perfect syllogisme (SeP) waar zijn.

4. SeP *(eae-1)* toegepast op 3 en 2

Stap 4 is de conclusie van het syllogisme *(eae-2)* waarvan de geldigheid viel aan te tonen. We hebben dus de conclusie van het syllogisme afgeleid uit de aanname dat de premissen waar zijn, en hierbij slechts gebruik gemaakt van de regels in Stelling 1.4.3. We hebben laten zien dat $PeM, SaM/SeP$.

Het rijtje categorische zinnen in het bovenstaande voorbeeld (zie Figuur 1.4) wordt een *afleiding* van het syllogisme *(eae-2)* genoemd.

1.	PeM	major premisse
2.	SaM	minor premisse
3.	MeP	conversie toegepast op 1
4.	SeP	*(eae-1)* toegepast op 3 en 2

Figuur 1.4: Een afleiding van *(eae-2)*

Tussen de premissen en de conclusie in kunnen nog willekeurig veel andere zinnen staan. In het voorbeeld is er één tussenstap: stap 3. Belangrijk is dat alle stappen die op de premissen volgen gerechtvaardigd moeten kunnen worden op basis van de voorafgaande stappen en een vast assortiment van regels, in ons geval de vier regels in stelling 1.4.3. De rechtvaardiging – de reden waarom elk stap mag worden genomen – wordt kort achter de stap vermeld. Bijvoorbeeld staat achter stap 3 dat de zin MeP is verkregen door toepassing van conversie op de eerste stap in de afleiding.

Definitie 1.4.4 (Afleiding)**.** Een *afleiding* is een rijtje zinnen dat begint met de premissen en eindigt met een conclusie. Zinnen die tussen de premissen en de conclusie staan dienen gerechtvaardigd te worden door de regels van het afleidingssysteem. Als er geen zinnen staan tussen de premissen en de conclusie moet de redenering een perfect syllogisme zijn.

Opgave 8. *Leidt de geldigheid van het syllogisme* (aii-3) *af onder gebruikmaking van het perfecte syllogisme* (aii-1)*.*

Op het eerste gezicht lijkt het misschien heel raar om de geldigheid van een redenering aan te tonen door middel van een afleiding. We hadden geldigheid toch als volgt gedefinieerd: "in alle gevallen waar de premissen waar zijn, is ook de conclusie waar"? Wat is het verband tussen afleiding en geldigheid? Er worden in de logica twee noties van geldigheid onderscheiden: een semantische notie van geldigheid en een syntactische notie. De semantische notie is degene die we al gezien hebben in Definitie 1.4.1 op bladzijde 18. In dat geval schrijven we

$$P_1, ..., P_n \models C.$$

Deze notie van geldigheid is gedefiniëerd in termen van de waarheidscondities van de premissen en de conclusie, en dus hun betekenis. Daarom ook de naam *semantische* notie van geldigheid.

Daarnaast is er ook nog een syntactische notie van geldigheid. Deze is gedefinieerd in termen van afleidingen.

Definitie 1.4.5 (Syntactische geldigheid)**.** Een redenering met de premissen $P_1, ..., P_n$ en de conclusie C heet syntactisch geldig desda er een afleiding bestaat voor de redenering. Wij schrijven in dit geval

$$P_1, ..., P_n \vdash C.$$

Wij willen graag een afleidingssysteem (een set regels voor hoe wij afleidingen mogen construeren) zodat beide noties van geldigheid op hetzelfde neerkomen. In het geval van traditionele logica willen wij dus dat wij dan en slechts dan een afleiding voor een syllogisme op basis van de vier regels in stelling 1 kunnen geven als het syllogisme ook echt (semantisch) geldig is. Pas dan kunnen wij ervan spreken dat de afleiding de (semantische) geldigheid van het syllogisme aantoont. Om precies te zijn willen wij dat de volgende twee stellingen waar zijn

1. Als er een afleiding bestaat voor de redenering met de premissen $P_1, ..., P_n$ en de conclusie C, dan is de redenering semantisch geldig, i.e.,

   $$\text{als } P_1, \ldots, P_n \vdash C, \text{ dan } P_1, \ldots, P_n \models C.$$

2. Als de redenering met de premissen $P_1, ..., P_n$ en de conclusie C semantisch geldig is, dan bestaat er een afleiding voor de redenering, i.e.,

$$\text{als } P_1, \ldots, P_n \models C, \text{ dan } P_1, \ldots, P_n \vdash C.$$

Is het eerste het geval, dan zeggen we dat het afleidingssysteem *correct* is. We spreken dan ook van een correctheidsstelling. Is het tweede het geval, dan zeggen we dat het afleidingssysteem *volledig* is. De bijbehorende stelling heet een volledigheidsstelling. Het afleidingssysteem voor syllogismen bestaande uit de vier principes in Stelling 1.4.3 is correct en volledig. Dat is precies wat de stelling beweert.

Voor de afleiding van de meeste syllogismen zijn, behalve de perfecte syllogismen, conversie en subalternatie genoeg. Voor de afleiding van *(aai-3)* (MaP, MaS / SiP) hebben we allebei nodig. We beginnen met de premissen van *(aai-3)*: MaP en MaS. Met subalternatie volgt uit MaS dat MiS waar is. Met conversie leiden we de waarheid van SiM af. Dus nu hebben we MaP en SiM. Met het perfecte syllogisme *(aii-1)*: $MaP, SiM/SiP$ volgt dan de conclusie van *(aai-3)*, te weten SiP.

1.	MaP	major premisse
2.	MaS	minor premisse
3.	MiS	subalternatie op 2.
4.	SiM	conversie op 3.
5.	SiP	*aii*-1 met 1. als major premisse en 4. als minor premisse

Toevallig stonden in de afleiding hierboven de premissen van het perfecte syllgisme dat wij in regel 5 hebben toegepast al in de goede volgorde: eerst in stap 1 de majorpremisse en dan in stap 2 de minorpremisse. Is dit het geval, dan is het heel gemakkelijk te zien welk perfect syllogisme wij voor de afleiding nodig hebben. Jammer genoeg is dit niet altijd het geval. Dit kunnen we zien in de afleiding van *(aee-2)* (PaM, SeM / SeP). We beginnen met de premissen van *(aee-2)*: PaM en SeM. Met conversie volgt uit SeM dat MeS waar is. Met MeS als major premisse en de eerste zin PaM als minor premisse kunnen we nu gebruik maken van het perfect syllogisme *(eae-1)* en leiden PeS af. Met conversie volgt dan de conclusie van *(aee-2)*, te weten SeP.

1.	PaM	major premisse
2.	SeM	minor premisse
3.	MeS	conversie op 2
4.	PeS	*eae-1* met 3 als major premisse en 1 als minor premisse
5.	SeP	conversie op 4

In bovenstaande afleiding hebben we het perfect syllogisme *(eae-1)* (MeP, SaM / SeP) toegepast, maar in de vorm:

$$\frac{\begin{array}{l} MeS \\ PaM \end{array}}{PeS} \quad \textit{(eae-1)}$$

Met andere woorden, in de toepassing was de majorterm gekenmerkt door de hoofdletter S, de minorterm met de hoofdletter P en slechts de middenterm was het bekende M. Zoals we eerder opmerkten is het niet van belang welke letters voor de verschillende termen worden gebruikt. Het is alleen belangrijk dat binnen een redenering altijd dezelfde letter wordt gebruikt voor dezelfde term. Ook met de letter S voor de majorterm en de letter P voor de minorterm gaat het nog steeds om het syllogisme *(eae-1)*.

Je kunt je afvragen waarom in dit geval niet de conventie wordt gevolgd dat P voor de majorterm staat. De reden hiervoor is simpelweg dat ook voor een afleiding geldt dat binnen de afleiding altijd dezelfde letter staat voor dezelfde term. De toewijzing van letters aan termen gebeurt in de eerste twee stappen van de afleiding door het opnoemen van de premissen van het af te leiden syllogisme. Dan wordt P in de regel gebruikt voor de majorterm van het af te leidende syllogisme, S voor de minorterm van dit syllogisme, en M voor de middenterm. Maar zoals bovenstaande afleiding laat zien is de majorterm van het af te leiden syllogisme niet automatisch ook de majorterm van het perfect syllogisme dat in de afleiding wordt gebruikt, enz. Dit kan in het begin zeer verwarrend zijn. Daarom is het aan te raden om bij het gebruik van een perfect syllogisme ook even de vertaalsleutel voor dit perfecte syllogisme te vermelden. In bovenstaande afleiding, bijvoorbeeld, had stap 4 kunnen worden uitgebreid met "*eae-1 met stap 3 als major en stap 1 als minor premisse, waarbij S staat voor de majorterm, P voor de minorterm, en M voor de middenterm van het perfecte syllogisme*".

Opgave 9. *Leidt de geldigheid van het syllogisme* (aee-4) *af onder gebruikmaking van het perfecte syllogisme* (eae-1).

Reductio ad absurdum.

Al eerder werd in het college de bewijstechniek *reductio ad absurdum* besproken. Dit is een indirecte bewijsmethode. Doel van het bewijs is om te laten zien dat een bepaalde zin φ waar is. Soms lukt het niet om φ direct af te leiden uit de gegeven stellingen. Dan kan de bewijstechniek *reductio ad absurdum* hulp bieden. Dit werkt als volgt. Je begint met de aanname dat de zin φ die je wilt bewijzen onwaar is. Dan laat je zien dat deze aanname tot een tegenspraak leidt. Dan kan dus de zin φ niet onwaar zijn, dus concludeer je afsluitend dat φ waar is.

Achter deze bewijstechniek zit het idee dat elke zin ofwel waar ofwel onwaar moet zijn. Als dus aan te tonen valt dat de zin niet onwaar kan zijn (omdat dit tot een tegenspraak leidt) dan moet de zin dus waar zijn. Over deze aanname – ook bekend als *tertio non datur* – en de bewijsmethode *reductio ad absurdum* is veel discussie in de logica. Voor Aristoteles, echter, waren de principes

vanzelfsprekend geldig.
Voor principe 4 van Stelling 1.4.3 wordt *reductio ad absurdum* niet direct toegepast, maar een regel die hieruit is af te leiden: *is de conclusie van een geldig syllogisme onwaar, dan moet (tenminste) één van de premissen onwaar zijn.* Dit volgt middels *reductio ad absurdum* uit de definitie van geldigheid: als de premissen waar zijn, dan is de conclusie noodzakelijk waar.

Lemma 1.4.6. *Zij $\varphi, \psi/\chi$ een geldig syllogisme. Als χ onwaar is, dan is φ of ψ onwaar.*

Bewijs middels reductio ad absurdum. Stel wij hebben een willekeurig geldig syllogisme $\varphi, \psi/\chi$. Stel verder dat de conclusie χ van het syllogisme onwaar is. We laten zien middels *reductio ad absurdum* dat dan ook tenminste één van de premissen φ of ψ van het syllogisme onwaar moet zijn.

Neem hiervoor aan dat de stelling onwaar is. Dwz., alle premissen zijn waar, ondanks dat de conclusie van het syllogisme onwaar is. Uit de geldigheid van het syllogisme (als alle premissen waar zijn, dan *moet* ook de conclusie waar zijn) volgt dan echter dat de conclusie waar is. Dit is in tegenspraak met onze aanname dat de conclusie van het syllogisme onwaar is. Wij concluderen dat niet alle premissen waar zijn – minstens één van de premissen is onwaar. □

Maar hoe kan dit lemma worden gebruikt om de geldigheid van een syllogisme aan te tonen? Om het lemma toe te passen moeten wij eerst afleiden dat de conclusie van een perfect syllogisme onwaar is. Alleen op basis van de eerste drie principes van Stelling 1.4.3 kunnen wij dit nooit aantonen, want deze principes kunnen alleen worden gebruikt om te laten zien dat een bepaalde categorische zin waar is. Inderdaad hebben we hiervoor nog twee principes nodig, wier geldigheid we al eerder hadden besproken. Dit zijn de relaties tussen contradictoire zinnen in het vierkant van oppositie:[10]

1. een zin XaY is waar dan en slechts dan als de zin XoY onwaar is, en,
2. een zin XiY is waar dan en slechts dan als de zin YeX onwaar is.

Door gebruik te maken van deze 'contradictoir-relaties' valt dus inderdaad af te leiden dat bepaalde categorische zinnen onwaar zijn.
Samenvattend: om met behulp van de *reductio ad absurdum* regel de geldigheid van een syllogisme aan te tonen maakt men gecombineerd gebruik van:

1. de stelling dat als de conclusie van een perfect syllogisme onwaar is, ook tenminste één van zijn premissen onwaar moet zijn, i.e., Lemma 1.4.6, en

2. de relaties tussen contradictoire zinnen in het oppositievierkant:

    - een zin SaP is waar dan en slechts dan als de zin SoP onwaar is, en,
    - een zin SiP is waar dan en slechts dan als de zin SeP onwaar is.

[10] Cf. Definitie 1.2.1 en Figuur 1.1

De *reductio ad absurdum* regel wordt bijvoorbeeld toegepast bij de afleiding van het syllogisme *(oao-3)*. Dit is een syllogisme van de vorm $MoP, MaS/SoP$. Stel dat MoP en MaS allebei waar zijn. Als MoP waar is dan is het hieraan contradictoire MaP niet waar. Met Barbara *(aaa-1)* (zie Tabel 1.3) hebben we echter, met vervanging van schematische letters:

$$\begin{array}{ll} SaP & \\ \underline{MaS} & \textit{(aaa-1)} \\ MaP & \end{array}$$

Nu we weten dat de conclusie MaP niet waar is, moet, volgens de reductio-regel, tenminste één van de *(aaa-1)*-premissen SaP of MaS onwaar zijn. Maar we hadden al aangenomen dat MaS waar was. Dus moet SaP wel onwaar zijn. Maar als SaP onwaar is, dan is het hieraan contradictoire SoP waar. En dit is inderdaad de conclusie van het syllogisme *(oao-3)*. Met anderen woorden: we zijn begonnen bij de premissen van *(oao-3)*, en met behulp van *(aaa-1)* (en de *reductio*) hebben we de conclusie van het syllogisme *(oao-3)* afgeleid.

Terzijde Als de geldigheid van syllogisme A wordt aangetoond met behulp van de geldigheid van een perfect syllogisme B, dan zeggen we ook dat het syllogisme A wordt **gereduceerd tot** het perfect syllogisme B. Je zou je kunnen afvragen waarom men deze procedure "reduceren" noemt. We "reduceren" *(oao-3)* toch helemaal niet "naar" *(aaa-1)*? Wat er daarmee bedoeld is echter dat we *de vraag naar de geldigheid van* (oao-3) reduceren tot *de vraag naar de geldigheid van* (aaa-1) (welke volgens Aristoteles al intuïtief duidelijk is). Zoals we al hebben besproken, een afleiding werkt als bewijs van de geldigheid van een syllogisme omdat we verzekerd zijn van de geldigheid van de regels die we toepassen.

De notie van een afleiding, waarin de geldigheid van een redenering wordt afgeleid uit een beperkt aantal regels, i.e., de notie van syntactisch geldigheid, speelt een zeer belangrijke rol binnen de logica. Zoals bij de syllogismen is het vaak het geval dat ofwel de regels veel eenvoudiger zijn dan de redenering zelf, ofwel dat er weinig regels nodig zijn om de geldigheid van veel redeneringen aan te tonen; er zijn bijvoorbeeld 24 geldige syllogismen, die af te leiden zijn uit slechts negen regels: vier perfecte syllogismen, twee conversie regels en twee subalternatie regels, en de *reductio*. Afleidingssystemen geven ons dus vaak een compactere en beter handhaafbare beschrijving van de geldige redeneringen in een bepaald logisch systeem.

Overigens was Aristoteles zich er al van bewust dat zijn perfecte syllogismen – de eerste vier syllogismes van het eerste figuur – niet de enige syllogismen waren waartoe alle geldige syllogismen gereduceerd konden worden. Dit laat zien dat logisch gezien er geen prioriteit bestaat voor wat Aristoteles "perfecte" syllogismen noemt. Ook dit vinden we vaak terug binnen de logica: de geldige redeneringen binnen een bepaald logisch systeem kunnen vaak worden afgeleid uit verschillende verzamelingen van basisregels. De keuze voor een afleidingssysteem wordt bepaald op basis van overwegingen die extern zijn aan de logica.

Middeleeuws ezelsbruggetje

In de Middeleeuwen moest elke student alle geldige syllogismen uit het hoofd kennen en bovendien bij elk niet-perfect syllogisme zonder aarzelen een reductieprocedure tot een perfect syllogisme kunnen aangeven. Ze hadden daarbij een ezelsbruggetje tot hun beschikking dat er in grote lijnen als volgt uitzag.

Alle geldige syllogistische vormen hebben een naam en de klinkers in die naam geven de modus van het syllogisme in kwestie aan. Zo zijn de namen van de vier perfecte syllogismen van de eerste figuur: Barbara, Celarent, Darii, en Ferio: *(aaa-1)*, *(eae-1)*, *(aii-1)* en *(eio-1)*. In Tabel 1.3 staat de volledige lijst van namen.[11]

Figuur 1	*Figuur 2*	*Figuur 3*	*Figuur 4*
Barbara	Barocco	Bocardo	Camenes
Celarent	Camestres	Datisi	Dimaris
Darii	Cesare	Disamis	Fresison
Ferio	Festino	Ferison	**Bramantip**
Barbari	**Camestrop**	**Darapti**	**Camenop**
Celaront	**Cesaro**	**Felapton**	**Fesapo**

Tabel 1.3: Mnemonische lijst van geldige syllogismen

De namen van de geldige vormen van de tweede, derde en vierde figuur zijn verder zo opgebouwd dat je aan de medeklinkers kan zien hoe ze tot een perfect syllogisme gereduceerd kunnen worden. De eerste medeklinker in die naam correspondeert met de eerste medeklinker van het perfecte syllogisme waartoe de reductie leidt. Bocardo – de naam van *(oao-3)* – zal dus reduceren tot Barbara. Cesare *(eae-2)* en Camenes *(aee-4)* tot Celarent, en Felapton *(eao-3)* tot Ferio.

De aanwijzingen uit de overige medeklinkers zijn de volgende: een ‘m’ geeft aan dat de premissen verwisseld moeten worden; een ‘s’ geeft aan dat conversie toegepast moet worden op de zin voor deze ‘s’; een ‘p’ geeft aan dat er achtereenvolgens subalternatie en conversie toegepast moet worden op de zin die voor die ‘p’ staat, en een ‘c’ geeft aan dat er bij de reductie gebruik wordt gemaakt van de reductio ad absurdum regel met betrekking tot de premisse voor de ‘c’ in kwestie. (De andere letters hebben geen betekenis, maar maken de namen makkelijker om uit te spreken.)

De eerste twee regels (‘m’: premissen wisselen, en ‘s’: conversie) zijn te zien bij Camenes *(aee-4)*.

[11] De dikgedrukte namen duiden hier weer aan dat de geldigheid van deze syllogismen existentiële import vooronderstelt.

$$\frac{\begin{array}{l} PaM \\ MeS \end{array}}{SeP} \quad \textit{(aee-4)}$$

Volgens de 'C' is die af te leiden uit Celarent *(eae-1)*. We beginnen bij de premissen: PaM en MeS. Door de premissen te wisselen ('m') komen we op een syllogisme van de eerste figuur: uit MeS en PaM volgt PeS met gebruik van het perfect syllogisme Celarent *(eae-1)*:

$$\frac{\begin{array}{l} MeS \\ PaM \end{array}}{PeS} \quad \textit{(eae-1)}$$

Omdat de 's' staat achter de conclusie in Camenes, passen we dus conversie toe op de conclusie (niet van Camenes zelf, maar van de tussenstap waar we aan toe zijn): uit PeS volgt met gebruik van conversie SeP. En dat is de conclusie van Camenes: met gebruik van *(eae-1)* en conversie (en ook premissen wisselen, wat altijd mag) hebben we laten zien dat de conclusie van Camenes uit zijn premissen volgt, of met andere woorden dat *(aee-4)* geldig is.

Om het gebruik van de 'p' te laten zien, beschouwen we Darapti *(aai-3)*.

$$\frac{\begin{array}{l} MaP \\ MaS \end{array}}{SiP} \quad \textit{(aai-3)}$$

Dit syllogisme moet gereduceerd worden naar het perfecte syllogisme Darii *(aii-1)*. We nemen eerst de premissen: MaP en MaS. De 'p' staat achter de tweede premisse. We passen subalternatie toe op MaS, wat MiS oplevert; vervolgens passen we daarop conversie toe, wat SiM oplevert. Nu hebben we MaP en SiM: de premissen van Darii. Dan krijgen we de conclusie van Darii, SiP:

$$\frac{\begin{array}{l} MaP \\ SiM \end{array}}{SiP} \quad \textit{(aii-1)}$$

En SiP is ook de conclusie van Darapti *(aai-3)*: met gebruik van Darii (en subalternatie en conversie) hebben we laten zien dat de conclusie van Darapti volgt uit zijn premissen, of met andere woorden, dat Darapti geldig is.

Tenslotte is er nog de 'c', welke de *reductio ad absurdum* regel aanduidt. Uit de lijst hierboven kunnen we aflezen dat Aristoteles de reductio-regel in slechts twee gevallen gebruikte: om Barocco en Bocardo af te leiden. Hierboven hebben we al gezien hoe de geldigheid van Bocardo afgeleid kan worden uit Barbara. Barocco kan op soortgelijke manier uit Barbara worden afgeleid.

Opgave 10. *Reduceer de volgende twee syllogismen tot een perfect syllogisme.*

(i) iai-3.

(ii) eao-3.

1.4.5 Redeneringen met meer dan twee premissen

We besteden nu nog even kort aandacht aan redeneringen met meer dan twee premissen. Beschouw de volgende categorische redenering met vier premissen:

$$\begin{array}{c} MaP \\ SaM \\ NeP \\ RiS \\ \hline RoN \end{array} \tag{19}$$

Deze redenering is geldig. Echter, de bewijsmethode die we in de vorige paragraaf gebruikt hebben, het opstellen van een Venn-diagram, is hier niet meer adekwaat toe te passen. In de bovenstaande redenering treden vijf termen op. Dit heeft tot gevolg dat we in een Venn-diagram 32 verschillende gebieden zouden moeten kunnen onderscheiden, elk de doorsnede van een vijftal termen of complementtermen representerend. Als we dan in die gebieden kruisjes moeten gaan zetten, dan wordt het al vlug onoverzichtelijk. (Sterker nog, als verzamelingen 'convex' weergegeven worden dan leert de topologie ons (Helly's theorema) dat we niet alle mogelijke combinaties van vier verzamelingen kunnen representeren in een twee-dimensionaal Venn-diagram.)

Er is echter nog een andere manier om de geldigheid van de hier ter discussie staande redenering aan te tonen. Geldige redeneringen met meer dan twee premissen kunnen altijd gereduceerd worden tot redeneringen die bestaan uit redeneerstappen die elk twee of minder premissen behelzen. (Hierbij kan het overigens nodig zijn dat we tevens gebruik maken van een reductio ad absurdum regel, waarover hieronder meer.) Voor de bovenstaande redenering kunnen we als volgt te werk gaan.

Om te beginnen kunnen we uit de eerste premisse MaP en de tweede SaM met gebruikmaking van Barbara *(aaa-1)* concluderen dat SaP:

$$\begin{array}{c} Map \\ SaM \\ \hline SaP \end{array} \quad \textit{(aaa-1)}$$

Vervolgens kunnen we deze tussenconclusie (SaP) gebruiken om samen met de derde premisse (NeP) te concluderen dat NeS, met gebruikmaking van *(aee-2)*:

$$\begin{array}{c} SaP \\ NeP \\ \hline NeS \end{array} \quad \textit{(aee-2)}$$

De tweede tussenconclusie (NeS) levert dan samen met de vierde premisse (RiS) de beoogde conclusie RoN op, met gebruikmaking van *(eio-2)*:

$$\begin{array}{ll} NeS & \\ \underline{RiS} & (eio\text{-}2) \\ RoN & \end{array}$$

Op deze wijze hebben we stapsgewijs laten zien dat de bovenstaande redenering geldig is, aan de hand van redeneringen die elk bestaan uit twee premissen. Meer in het algemeen kunnen alle meer complexe redeneringen herleid worden tot redeneerstappen die elk maar twee of minder premissen gebruiken. (Plus de genoemde reductio ad absurdum regel.) We zullen hier niet proberen deze zogeheten 'volledigheid' van het logisch systeem hier te bewijzen.

Opgave 11.

(i) Herschrijf de volgende categorische redenering als een keten van drie geldige syllogistische vormen: $PeQ, RaS, RaQ, SaT/ToP$.

(ii) Reduceer elk van de syllogistische vormen die u onder (i) gevonden heeft tot een syllogisme van de eerste figuur.

1.4.6 Distributie en de geldigheid van syllogismen

De scholastische logici wilden graag weten aan welke formele eigenschappen een syllogisme moet voldoen om haar geldig te maken. Een belangrijk begrip in dit verband betreft de *gedistribueerdheid* van een term in een categorische zin. Volgens de scholastici is de subjectterm gedistribueerd in (universele) *a*- en *e*-zinnen, en de predikaatterm in de (negatieve) *e*- en *o*-zinnen.

Distributie	*a*-zin	*i* -zin	*e*-zin	*o*-zin
subject term	gedistribueerd	niet gedistrib.	gedistribueerd	niet gedistrib.
predikaat term	niet gedistrib.	niet gedistrib.	gedistribueerd	gedistribueerd

Tabel 1.4: Distributie van termen

De vraag is nu wat het over een term zegt dat hij gedistribueerd is. Tot zover is dit een volledig willekeurige classificatie van posities in categorische zinnen. De scholastici kwamen op het distributiebegrip op grond van de volgende observatie. In *a*- en *e*-zinnen wordt ons iets verteld over elk specifieke object dat onder de subjectterm valt: Als alle S de eigenschap P hebben, dan heeft ook *deze* S de eigenschap P, en als geen enkele S P is, dan is ook *deze* S niet P. Dezelfde truc gaat op bij de predikaatterm in *e*- en *o*-zinnen: als geen enkele S P is, dan is ook geen enkele S *deze* P, en als sommige S niet P zijn, dan zijn ook sommige S niet *deze* P. De predikaatterm in een *a*-zin is niet gedistribueerd want als alle S P zijn, dan kun je niet concluderen dat alle S deze P zijn. Wat *i*-zinnen betreft, kun je er op dezelfde manier achter komen dat noch de subjectterm noch de predikaatterm gedistribueerd is.

Dit is nog steeds wat vaag, maar met behulp van moderne terminologie kunnen we dit verder preciseren. We introduceren een nieuw teken '$\subseteq$' en schrijven

'$B \subseteq A$' voor termen A en B desda alle objecten waar B op van toepassing is ook objecten zijn waar A op van toepassing is.[12]

Bijvoorbeeld kunnen we schrijven *tijger* $\subseteq$ *roofdier*, want alle tijgers zijn roofdieren, dus alle objecten waar de term *tijger* op van toepassing is zijn ook objecten waar de term *roofdier* op van toepassing is. Stel nu dat we termen A en B hebben met $B \subseteq A$ en dat A voorkomt als subjectterm in een ware a-zin: AaX. Dan valt op dat als je nu A vervangt door B (BaX) de zin gewoon waar blijft. Bijvoorbeeld, de zin *Alle roofdieren eten vlees* is een ware a-zin. Als je de term *roofdier* vervangt door *tijger* dan krijg je *Alle tijgers eten vlees.* Deze zin is nog steeds waar. Wat voor termen A en B je ook kunt verzinnen met de eigenschap $B \subseteq A$, altijd als A voorkomt in de subject positie van een a-zin, dan kun je hem door B vervangen en de zin blijft gewoon waar. Als dit het geval is voor een positie in een zin, dan noemen wij die positie *monotoon dalend*. De subject term van a-zinnen is dus monotoon dalend.

Definitie 1.4.7 (Monotoon dalend)**.** Zij B een term en zij φ een zin van de categorische logica waarin deze term voorkomt. We zeggen dat de positie van B in φ *monotoon dalend* is desda voor iedere term A zodanig dat $A \subseteq B$ geldt dat als φ waar is dan is φ ook waar als we B in φ vervangen met A.

Het is een goede oefening om even na te gaan dat een positie in een zin precies dan gedistribueerd is als hij monotoon dalend is. Het wel of niet gedistribueerd zijn van termen in een categorische zin zegt dus iets over conclusies die uit de zin getrokken kunnen worden. Neem, bijvoorbeeld, de predikaatterm in een e-zin: *Geen S is een roofdier.* Nu vervangen we *roofdier* door *tijger*: *Geen S is een tijger.* Als de eerste zin waar is, moet de tweede zin ook waar zijn.[13] Dus, uit $B \subseteq A$ volgt XeA/XeB. De predikaat term in e-zinnen is monotoon dalend.

Opgave 12. *Laat zien dat de subjectterm van o-zinnen en de predikaatterm van i-zinnen niet gedistribueerd zijn. Kies dus in beide gevallen een A term en een B term zodanig dat $B \subseteq A$. Geef dan een concreet voorbeeld voor een o-zin (i-zin) die met A als subjectterm (predikaatterm) waar is, maar met B onwaar.*

Met behulp van het distributiebegrip blijkt de notie van een geldig syllogisme te karakteriseren op een heel andere manier dan we in de voorafgaande secties zagen. Zo verschijnt, rond 1500, in de logica-leerboeken de volgende stelling.

Stelling 1.4.8 (Distributiestelling)**.** *Een syllogisme is geldig onder het postulaat van existentiële import desda het voldoet aan de volgende vier voorwaarden.*

(i) De middenterm is gedistribueerd in minstens één van de premissen.

(ii) Elke term die gedistribueerd is in de conclusie is ook gedistribueerd in één van de premissen.

[12] Het teken $\subseteq$ komt uit de verzamelingenleer en wordt in hoofdstuk 2 nogmaals geïntroduceerd. In traditionele logica zou je in plaats van $\subseteq$ het teken a schrijven.

[13] Als het moeilijk is om dit in te zien, vervang dan S door een concrete term, bijvoorbeeld *herkauwer*.

(iii) Minstens één van de premissen is affirmatief.

(iv) De conclusie is negatief desda minstens één van de premissen negatief is.

Wanneer we het postulaat van existentiële import laten vallen, dan moeten we de bovenstaande voorwaarden nog aanvullen met een vijfde:

(v) Als de conclusie particulier is, dan is ook minstens één van de premissen particulier.

Met behulp van deze stelling valt het heel makkelijk van een syllogisme af te lezen of hij geldig is of niet. Voor elk van de 4 (zonder existentiële import 5) eigenschappen gaan wij na of het syllogisme de eigenschap heeft. Heeft het syllogisme alle eigenschappen, dan is het geldig. Is in minstens één geval het antwoord *nee*, dan is het syllogisme niet geldig.

Opgave 13. *Bekijk de volgende twee redeneringen.*

1. *Sommige groenten zijn niet lekker. Dus zijn sommige lekkere dingen niet groen, want sommige groenten zijn niet groen.*
2. *Niemand is zowel rationeel als zwartharig. Daarom is er geen rationeel individu dat grappig is, want alle zwartharigen zijn grappig.*

Maak voor beide redenering de onderstaande drie opdrachten.

(i) Vertaal dit syllogisme en schrijf het in de standaardvorm op. Wat is de modus en wat is de figuur?

(ii) Onderzoek de geldigheid van dit syllogisme met behulp van een Venn-diagram. Geef kort aan hoe u tot uw conclusie gekomen bent.

(iii) Onderzoek de geldigheid van dit syllogisme met behulp van stelling 2. Geef kort aan hoe u tot uw conclusie gekomen bent.

Opgave 14. *Laat aan de hand van bovenstaande distributiestelling zien dat elk syllogisme met als majorpremisse een* i*-zin en als minor premisse een* e*-zin ongeldig is.*

Op basis van de distributiestelling kunnen allerlei ezelsbruggetjes worden verzonnen om de geldigheid van een syllogisme te achterhalen. Bijvoorbeeld, of een syllogisme aan de genoemde voorwaarden voldoet kan eenvoudig berekend worden met de volgende methode. Zet een '$-$' voor elke distribueerde term, en een '$+$' voor elke niet-distribueerde term. Voorts, zet '-1' achter elke negatieve zin. Met andere woorden, vervang 'SaP' door '$-S+P$', vervang 'SiP' door '$+S+P$', vervang 'SeP' door '$-S-P-1$' en vervang 'SoP' door '$+S-P-1$'. Laat φ' het resultaat zijn van deze herschrijving van een zins-schema φ. Dan vinden we dat $\varphi_1, \varphi_2/\psi$ desda $\varphi'_1+\varphi'_2 = \psi'$. (Hierbij moet je natuurlijk '$+M$' en '$-M$' tegen elkaar wegstrepen.) Hoewel deze manier om te zien of een syllogisme geldig is slechts een alternatieve (reken-)methode is om de bovenstaande stelling te testen, leert de praktijk dat ze veel gemakkelijker werkt. Dit is bijvoorbeeld het geval om te controleren of een redenering met meer dan twee premissen geldig is.

Dat de distributiestelling klopt kan met enige moeite worden aangetoond door gewoon alle syllogismen langs te gaan en te controleren of de stelling de goede voorspellingen maakt. Maar *waarom* klopt de stelling? Hierop vindt men op deze manier geen enkel antwoord. Met de middelen van traditionele logica blijkt het (bijna) onmogelijk om deze vraag de beantwoorden.[14] Met de technieken van moderne logica is het daarentegen geen enkel probleem. Maar het heeft nog honderden jaren geduurd voordat de grenzen van traditionele logica die hier heel duidelijk werden eindelijk konden worden overschreden.

[14]Het lijkt dat het slechts Leibniz gelukt is om voor de distributiestelling een bewijs te leveren.

Hoofdstuk 2

Elementaire verzamelingenleer

2.1 Fundamentele begrippen van de verzamelingenleer

2.1.1 De notie verzameling

Het concept van een verzameling is één van de meest fundamentele begrippen van de formele wetenschappen. Daarom is er geen echte definitie voor wat een verzameling is en moeten wij ons met synoniemen en voorbeelden behelpen. Dit wordt duidelijk in dit citaat van Georg Cantor, de grondlegger van de moderne verzamelingenleer.

> "Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen" [Georg Cantor, Beiträge der Begründung der Transfiniten Mengenlehre I. Math. Ann. 46: 481, 1895]

We zien hier bijvoorbeeld dat in het *definiens* de term 'Ganze' wordt gebruikt om de term 'Menge' (het *definiendum*) uit te leggen. De intuitie achter 'verzameling' en 'element van' is echter heel duidelijk zoals de volgende voorbeelden aan zullen tonen.

Een voorbeeld voor een verzameling is de verzameling van alle steden van Nederland. Een andere verzameling is de verzameling van kijkers van *De wereld draait door* vanavond. De elementen van verzamelingen kunnen concreet zijn, zoals de stoelen in deze kamer, bloedcellen of geluiden, of abstract, zoals priemgetallen. Er hoeft geen samenhang te bestaan tussen de elementen van een verzameling. Zo vormen bijvoorbeeld de hoofdstad van Frankrijk, het getal 3 en het categorische imperatief een verzameling. Doel van de verzamelingenleer is om de eigenschappen van verzamelingen te onderzoeken onafhankelijk van de specifieke objecten die de verzameling vormen.

2.1.2 Elementen van verzamelingen

De objecten die een verzameling vormen worden de **elementen** van de verzameling genoemd. Als a een object is en A een verzameling dan is het gebruikelijk om met het symbool $\in$ aan te geven als het object a element is van de verzameling A. In dat geval schrijven we $a \in A$, te lezen *a is een element van A*. Wil je duidelijk maken dat een bepaald object geen element is van een verzameling, dan zet je een schuin streepje door het teken $\in$. Stel bijvoorbeeld dat H de verzameling is van hoofdsteden van Europa. Dan kun je $\mathit{Rotterdam} \notin H$ schrijven.

Het is belangrijk te onderkennen dat een verzameling volledig bepaald wordt door zijn elementen. Waar een specifieke postzegelverzameling vaak nog gekenmerkt wordt door het boek waar ze zijn ingeplakt, heeft een verzameling in de verzamelingenleer geen andere eigenschappen dan de elementen die hij bevat. Alles wat we te weten kunnen komen over een verzameling wordt bepaald door de elementen die een verzameling heeft. Dit betekent onder meer dat als je te maken hebt met een verzameling A en een verzameling B, en ze blijken precies dezelfde elementen te bevatten, dan zijn A en B één en dezelfde verzameling. Dit wordt het *principe van extensionaliteit* genoemd en zullen we nog vaak terugzien.

2.1.3 Beschrijving van verzamelingen

Verzamelingen kun je op drie manieren beschrijven:

(1) We kunnen de elementen van een verzameling opsommen,

(2) We kunnen de elementen identificeren door middel van een karakteristieke eigenschap, of,

(3) We kunnen de elementen van een verzameling recursief definitiëren.

We zullen deze drie manieren hieronder één voor één bespreken.

Opsomming

De eenvoudigste methode om een verzameling te beschrijven is alle elementen van de verzameling op te sommen. Voorbeelden hiervoor zijn (1-a), (1-b) en (1-c). Om duidelijk te maken dat het om een verzameling gaat met de genoemde objecten worden de haakjes '{' en '}' gebruikt. Het moge duidelijk zijn dat de methode van opsomming alleen kan worden toegepast op verzamelingen met eindig veel elementen en dat deze methode al snel onhandig wordt naarmate de verzamelingen groter worden.

(1) Voorbeelden van verzamelingen door middel van opsomming

a. {Van Benthem, Groenendijk, De Jongh, Stokhof, Verkuyl} is de verzameling auteurs van het boek 'Logic, language and meaning'.

b. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ is de verzameling van even getallen kleiner dan 10.

c. $\{3, \text{Parijs}, \text{Balkenende}\}$ is verzameling van het getal 3, de hoofdstad van Frankrijk en onze ex-premier.

Karakteristieke eigenschap

Om grote verzamelingen makkelijk te kunnen beschrijven wordt vaak gebruik gemaakt van een beschrijving middels een karakteristieke eigenschap. Dit is een eigenschap die alle en alleen die objecten in de verzameling delen. De voorbeelden (2-a) en (2-b) illustreren deze mogelijkheid om verzamelingen te beschrijven. Ook hier wordt gebruik gemaakt van de haakjes { en }. De streep '|' staat voor ... *met de eigenschap* .... De streep '|' als zodanig betekent niets. Dus voorbeeld (1-a) kan worden gelezen als *De verzameling van alle x met de eigenschap x is auteur van het boek Logic, language and meaning.* De x in (2-a) en (2-b) is een **variabele**. We komen later in de cursus nog op variabelen terug. Voor dit moment kunnen we een variabele het best begrijpen als een plaats in een uitdrukking waar we andere dingen voor kunnen invullen. In het voorliggende geval staat de variabele x voor de elementen van de verzameling die wij willen beschrijven.

(2) Voorbeelden van verzamelingen met een karakteristieke eigenschap
  a. $\{x \mid x$ is co-auteur van het boek Logic, language and meaning$\}$
  b. $\{x \mid x$ is een natuurlijk getal en x is kleiner dan $10\}$

In deze wijze van karakteriseren van een verzameling zetelt overigens wel een gevaar. Is er bijvoorbeeld wel een verzameling van objecten voor iedere karakteriserende eigenschap? Anders geformuleerd: is het gegarandeerd dat iedere definitie van een verzameling door middel van een karakteriserende eigenschap wel goed gedefiniëerd is?

We kunnen bijvoorbeeld een verzameling A alsvolgt definiëren

$$A = \{x \mid x \in A\}$$

Zoals we hebben gezien, geldt de uitspraak $A = \{x \mid x \in A\}$ voor *alle* verzamelingen A, dus het kan nooit als een definitie van een specifieke verzameling gebruikt worden. Op soortgelijke wijze, probeer A te definiëren als

$$A = \{x \mid x = A\}$$

Een verzameling dus die als enige element zichzelf zou hebben. Zo'n verzameling, mocht deze al bestaan, is conceptueel lastig, voor sommigen onmogelijk, te bevatten.

Zulk soort definities leveren ook logische problemen op. Beschouw bijvoorbeeld als karakteriserende eigenschap *is geen element van zichzelf*. Dat er verzamelingen zijn die geen element van zichzelf zijn is makkelijk in te zien. Neem bijvoorbeeld de verzameling S van studenten. S is zelf geen student, dus $S \notin S$. Vorm nu de verzameling van alle verzamelingen met de eigenschap geen element van zichzelf te zijn. Deze verzameling kunnen we alsvolgt weergeven:

$$Z = \{x \mid x \text{ is geen element van zichzelf}\}$$

Als er zo'n verzameling is dan kun je je afvragen of de verzameling Z een element van zichzelf is, ofwel, of $Z \in Z$? Stel bijvoorbeeld dat Z een element is van Z. Dan zou Z niet de karakteristieke eigenschap hebben van de elementen van Z en zou dus geen element van Z zijn. Maar als Z geen element van zichzelf is, dan zou het dus wel de karakteristieke eigenschap hebben die het een element van Z maakt. Kortom, wij worden geconfronteerd met een logische paradox. We komen later nog terug op deze beroemde paradox van de verzamelingenleer.

Recursieve definitie

Een techniek om grote, mogelijk oneindig grote, verzamelingen goed te beschrijven en waarmee we wat meer vat op de elementen krijgen is het gebruik van recursieve definities. We hebben in Hoofdstuk 1 al een voorbeeld gezien van een recursieve definitie toen we de syntaxis van de categorische logica definieerde (cf. Definitie 1.1.1). Een recursieve definitie beschrijft een methode hoe je gegeven een eindig aantal basiselementen alle andere elementen van de verzameling kunt genereren.[1] Een ander voorbeeld van een recursieve definitie staat in (3), die de verzameling E van even getallen genereert. Deel (3-a) van de definitie beschrijft de basiselementen van de verzameling, in dit geval het getal 0. Deel (3-b) geeft aan hoe je uit de basiselementen nieuwe elementen kunt genereren: we weten dat 0 een element is van E (op grond van (3-a)), dus ook het getal 2 is een element van E. Gegeven dat 2 een element is van E, dan moet ook 4 een element zijn van E. En zo kunnen we blijven doorgaan. Het laatste gedeelte van de definitie stelt vast dat we alle elementen van E met behulp van (3-a) en (3-b) kunnen vinden.

(3) Voorbeeld van een recursieve definiëring van een verzameling E.

a. $0 \in E$,
b. Als $x \in E$, dan $x + 2 \in E$,
c. E bestaat slechts uit die objecten die zijn gegenereerd op grond van (3-a) en (3-b).

Aangezien de syntaxis van formele talen vaak oneindige verzamelingen zijn met een specifieke structuur worden deze dan ook vaak recursief gedefinieerd. Vergelijk bijvoorbeeld ook de definities van de syntaxis van de propositielogica en de predicatenlogica.

2.1.4 Bijzondere verzamelingen

In de logica worden soms verzamelingen besproken, die (om verschillende redenen) op het eerste gezicht wat onnatuurlijk lijken. Een voorbeeld is een verzameling met slechts één element. Zo is {Amsterdam} de verzameling van de hoofdstad/hoofdsteden van Nederland. Op zich een heel natuurlijke constructie, maar toch wat raar, want waarom moet je iets wat toch maar één element heeft een verzameling noemen? Het is belangrijk om goed te begrijpen dat 'Amsterdam' en '$\{Amsterdam\}$' niet hetzelfde zijn. Het eerste staat voor het object 'de stad Amsterdam'. Het tweede beschrijft de verzameling waar Amsterdam het enige element van is.

Een andere bijzondere verzameling is **de lege verzameling**, de verzameling die helemaal geen elementen heeft. Omdat een verzameling volledig bepaald is door zijn elementen is er maar één lege verzameling. Stel namelijk dat je een verzameling A hebt, die geen elementen heeft, en een verzameling B die ook geen elementen heeft. Dan geldt dat ze precies dezelfde elementen hebben, namelijk geen, en dus zijn A en B één en dezelfde verzameling. Voor de lege verzameling gebruiken we het symbool $\varnothing$.

[1] Overigens kan je recursieve definities wel laten starten met een oneindige verzameling basiselementen maar dit laten we even buitenbeschouwing.

Een derde belangrijke soort van verzamelingen zijn verzamelingen met **oneindig** veel elementen. Bijvoorbeeld de verzameling van natuurlijke getallen hebben oneindig veel elementen. De verzameling van natuurlijke getallen wordt wel aangegeven met het symbool $\mathbb{N}$.

Zoals we eerder hebben opgemerkt kun je een oneindige verzameling niet beschrijven door alle elementen op te noemen. Hiervoor moeten we de andere twee methoden om verzamelingen te beschrijven gebruiken. Niettemin worden vaak in informele contexten beschrijvingen zoals bijvoorbeeld $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ voor de verzameling van even getallen gebruikt. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat het voor de lezer wel duidelijk is hoe het rijtje moet worden voortgezet.

We zullen in Hoofdstuk 3 op oneindigheid terugkomen.

Omdat we we geen beperking willen plaatsen op dat waar verzamelingen uit opgebouwd kunnen zijn, kunnen we ook verzamelingen van verzamelingen maken. En weer verzamelingen daarvan, etc. En we kunnen verzamelingen hebben die als element objecten, verzamelingen, en verzamelingen van verzamelingen hebben, etc. Zo is bijvoorbeeld $\{a, \{a\}\}$ een verzameling, en wel een verzameling die uit twee elementen bestaat, namelijk a, en de verzameling die alleen uit a bestaat. En $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, is ook een verzameling, die uit drie elementen bestaat, namelijk a, de verzameling die alleen uit a bestaat, en de verzameling die we hierboven al hadden. Met dit eenvoudige voorbeeld kunnen we al twee dingen aangeven.

In de eerste plaats kunnen we op basis van één object (namelijk a) al een oneindige hoeveelheid verzamelingen maken. (Neem bijvoorbeeld a, en dan hebben we de verzameling bestaande uit a, de verzameling bestaande uit de vorige twee, de verzameling bestaande uit de vorige drie, etc.)

In de tweede plaats kunnen we niet goed praten over 'de verzameling van alle verzamelingen'. Want die verzameling zou zichzelf als element moeten bevatten, en dat kan welbeschouwd weer niet. Ook hier komen we later nog op terug. (Waarom dit intuïtief niet kan? Ga maar na: je kunt op je computer willekeurig welk document als attachment in een emailbericht slepen, behalve dat emailbericht zelf!)

2.1.5 Verzamelingen vergelijken

Een kwestie die de verzamelingenleer bestudeert zijn mogelijke relaties tussen verzamelingen. Twee belangrijke relaties bespreken we in wat volgt.

Identiteit

Een manier waarop twee verzamelingen gerelateerd kunnen zijn, is dat ze simpelweg identiek zijn. Maar wanneer is dit het geval? Een verzameling is volledig bepaald door zijn elementen. Dus, identiteit van twee verzamelingen A en B betekent dat deze twee verzamelingen precies dezelfde elementen hebben. In voorbeeld (4) is verzameling A identiek met verzameling B: de volgorde waarop je de elementen van een verzameling opschrijft maakt niet uit. De verzameling C is identiek met verzameling D: hetzelfde object kan niet meerdere keren in een verzameling voorkomen. (Maar dus wel meerdere keren genoemd worden in de beschrijving ervan!) Ook maakt het niet uit, welke vorm van beschrijving je voor een verzameling kiest. Dus de verzamelingen D, E en F zijn identiek.

(4) Voorbeelden van indentiteit van verzamelingen

$A = \{$Van Benthem, Groenendijk, De Jongh, Stokhof, Verkuyl$\}$
$B = \{$Groenendijk, Van Benthem, Verkuyl, Stokhof, De Jongh$\}$
$C = \{0, 2, 4, 6, 4, 8\}$,
$D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
$E = \{x \mid x \text{ is een even getal kleiner dan } 9\}$,

F is gedefiniëerd als volgt:
(i) $0 \in F$,
(ii) Als $x \in F$ en $x \leq 6$, dan $x + 2 \in F$
(iii) Verder is niets in F.

Om aan te geven dat twee verzamelingen identiek zijn gebruiken we het identiteitsteken $=$. Dus $A = B$ en $C = D = E = F$. Om kort aan te geven dat twee verzamelingen niet identiek zijn, zetten wij een schuin streepje door het identiteitsteken: $A \neq D$.

Deelverzameling

Een andere manier waarop twee verzamelingen A en B aan elkaar gerelateerd kunnen zijn is dat alle elementen van A ook elementen zijn van B. In dit geval zeggen wij dat A een deelverzameling is van B en we schrijven $A \subseteq B$. Als A een deelverzameling is van B dan kan B elementen bevatten die niet elementen van A zijn, maar dat hoeft niet het geval te zijn. Als dat niet het geval is, dan zijn de verzamelingen identiek. Weten wij zeker dat er wel een element van B bestaat dat geen element van A is, dan zeggen wij dat A **een echte deelverzameling** van B is en schrijven $A \subset B$. Is er minstens één element van A geen element van B, dan is A geen deelverzameling van B. Om dit aan te geven zetten wij weer een schuin streepje door het teken $\subseteq$. Bij voorbeeld (5) staan enkele voorbeelden ter verduidelijking van de notie deelverzameling.

(5) Voorbeelden van deelverzamelingen

$\{a, b, c\} \subseteq \{s, b, a, e, g, i, c\}$,
$\{a, b, j\} \not\subseteq \{s, b, a, e, g, i, c\}$,
$\{a, b, c\} \subset \{s, b, a, e, g, i, c\}$,
$\{a\} \subseteq \{a\}$, maar $\{a\} \not\subset \{a\}$,
$\{a, \{a\}\} \subseteq \{a, b, \{a\}\}$
$\{a\} \not\subseteq \{\{a\}\}$, maar $\{a\} \in \{\{a\}\}$.

Een verrassend gevolg van de manier waarop deelverzamelingen zijn gedefiniëerd is dat de lege verzameling een deelverzameling is van alle verzamelingen: voor alle A geldt: $\varnothing \subseteq A$. De lege verzameling heeft geen elementen, dus is het waar dat alle elementen van de lege verzameling ook elementen zijn van een willekeurig andere verzameling. Uit de definities volgt ook dat elke verzameling een deelverzameling van zichzelf is: voor alle A geldt: $A \subseteq A$. Alle elementen van A zijn immers een element van A.

Omdat, zoals gezegd, een verzameling volledig bepaald is door wat de elementen van die verzameling zijn, vinden we tevens dat als A en B een deelverzameling zijn van elkaar, ze identiek zijn.

Voor alle A en B: als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$, dan $A = B$.

Het is erg belangrijk om goed de noties 'element van' en 'deelverzameling van' uit elkaar te houden. Zo geldt wel $\varnothing \subseteq \varnothing$, maar niet $\varnothing \in \varnothing$. Om nog een voorbeeld te geven, stel $A = \{a, b, \{c\}\}$. Dan geldt $a \in A$ en $\{a\} \subseteq A$, maar niet $a \subseteq A$ en ook niet $\{a\} \in A$. Verder geldt $\{c\} \in A$ en $\{\{c\}\} \subseteq A$, maar niet $\{c\} \subseteq A$ en ook niet $\{\{c\}\} \in A$.

2.1.6 Operaties op verzamelingen

Iedereen is sinds de basisschool vertrouwd met wiskundige operaties, zoals de operatie $+$ van het optellen. Optelling is een operatie die twee getallen als argumenten neemt en een nieuw getal als resultaat levert: de som van de twee argumenten. Zulke operaties kunnen ook voor verzamelingen worden gedefiniëerd. Vier belangrijke operaties op verzamelingen worden hier nader besproken.

Vereniging

Een manier om uit twee verzamelingen A en B een nieuwe verzameling C te maken is de elementen van beide verzamelingen bij elkaar te voegen. Deze operatie wordt **de vereniging** van A en B genoemd. Het symbool voor de vereniging is $\cup$. Dus om uit te drukken dat de verzameling C het resultaat is van de vereniging van de verzamelingen A en B schrijven wij: $A \cup B = C$. Formeel is de vereniging als volgt gedefiniëerd:

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$.

Stel dat we bijvoorbeeld de volgende verzamelingen hebben:

$$A = \{\text{Van Benthem, Groenendijk, Stokhof, De Jongh, Verkuyl}\}$$
$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Dan is de vereniging van A en B:

$$A \cup B = \{\text{Van Benthem, Groenendijk, Stokhof, De Jongh, Verkuyl}, 0, 2, 4, 6, 8\}.$$

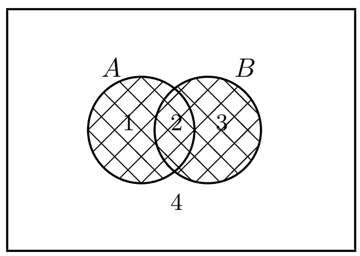
Zo kunnen we ook zeggen:

$$\{x \mid x \text{ is een even getal}\} \cup \{x \mid x \text{ is een oneven getal}\} = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal}\} = \mathbb{N}.$$

In (6-a) en (6-b) staan nog twee voorbeelden van vereniging.

(6) Voorbeelden van verenigingen van verzamelingen:
  a. $\{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \varnothing = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
  b. $\{0, 2, 4\} \cup \{0, 2\} = \{0, 2, 4\}$.

Operaties op verzamelingen kunnen op een zeer intuïtieve manier visueel worden weergegeven. Hiervoor gebruikt men de Venn-diagrammen, die wij al uit Hoofdstuk 1 kennen. In een Venn-diagram worden de relevante verzamelingen gerepresenteerd door cirkels. De elementen zijn de punten in de cirkel. Het Venn-diagram voor twee willekeurige verzamelingen bestaat uit twee elkaar overlappende cirkels (zie figuur 2.1). Het gebied 1 bevat de elementen van verzameling A die geen elementen zijn van B, het gebied 2 bevat de elementen van A en B, het gebied 3 bevat de elementen van B die geen elementen zijn van A, en het gebied 4 bevat de objecten die noch element zijn van A, noch van B. De vereniging van de verzamelingen A en B bestaat dan uit de gebieden 1, 2 en 3 bij elkaar. Deze vereniging is in figuur 2.1 aangegeven door middel van schuine arcering.



Figuur 2.1: Een Venn-diagram voor de vereniging $A \cup B$ van A en B

(Merk op dat de schuine arcering hier niet betekent dat A en B leeg zijn, zoals we hebben aangegeven met horizontale arceringen in hoofdstuk 1. Merk ook op dat de verzamelingen A en B natuurlijk wel leeg zouden *kunnen* zijn. Merk tenslotte op dat als A en B inderdaad allebei de lege verzameling zijn, dan is $A \cup B$ ook de lege verzameling.)

De operatie vereniging kan makkelijk worden uitgebreid naar een operatie op een n-tal verzamelingen. Als A_1 tot A_n een serie van n verzamelingen is, dan schrijven wij

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

voor de vereniging van al die verzamelingen. Dit is de verzameling van objecten die element van minstens één van de verzamelingen A_1 tot A_n zijn.

Doorsnede

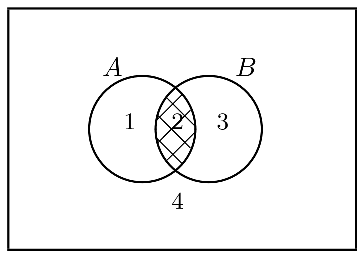
Gegeven twee verzamelingen A en B kunnen we ook kijken naar de verzameling van elementen die A en B gemeen hebben: de verzameling van objecten die een element zijn van beide verzamelingen. Deze operatie wordt **de doorsnede** van A en B genoemd. We schrijven $A \cap B$, en deze verzameling is als volgt gedefiniëerd:

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$.

Voorbeelden voor deze operatie staan in (7-a) tot (7-c).

(7) Voorbeelden van de doorsnede van twee verzamelingen:
 a. $\{2, 4, 6\} \cap \{4, 6, 8\} = \{4, 6\}$
 b. {Van Benthem, Groenendijk, Stokhof, De Jongh} $\cap \{2, 4, 6, 8\} = \varnothing$
 c. {Van Benthem, Groenendijk, Stokhof, De Jongh} $\cap \varnothing = \varnothing$.

In een Venn-diagram kan de doorsnede worden gerepresenteerd door alleen het gebied 2 te arceren (zie figuur 2.2).



Figuur 2.2: Een Venn-diagram voor de doorsnede $A \cap B$ van A en B

Het moge de lezer opgevallen zijn dat de Venn-diagrammatische representatie van de verzameling $A \cap B$ verdacht veel lijkt op die van de categorische propositie AeB. Het is belangrijk hier om te benadrukken dat de twee representaties verschillend begrepen moeten worden. In figuur 2.2 geven we een *verzameling* weer, terwijl het plaatje behorend bij de zin AeB de *betekenis* van een zin aanduidt. In figuur 2.2 *is* het gearceerde gebied de aangeduide verzameling, en in het vorige hoofdstuk gaf de arcering aan dat het aangeduide gebied leeg was, volgens de zin AeB in dit geval. Hieruit moge tevens blijken dat er ook een nauwe relatie is tussen de twee representaties. De zin AeB stelt dat het gebied aangeduid als $A \cap B$ de lege verzameling is.

De doorsnede kan gemakkelijk worden uitgebreid naar een operatie op meer dan twee verzamelingen. Als A_1 tot A_n een serie van n verzamelingen is, dan schrijven we

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

voor de doorsnede van die verzamelingen. Dit is de verzameling van objecten die element van alle verzamelingen A_1 tot A_n zijn.

Complement

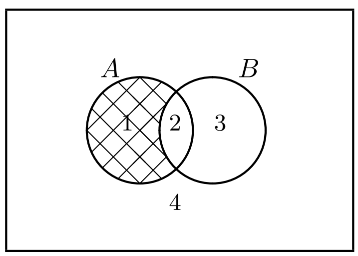
Een derde belangrijke operatie op verzamelingen is **het complement** van B gegeven, of *in*, een verzameling A. Deze operatie levert als resultaat de verzameling van objecten in A op die geen element zijn van B. Voor het complement zijn verschillende notaties in omloop. Wij schrijven voor het complement $A-B$, en de definitie luidt als volgt:

- $A - B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$.

In (8) staan een aantal specifieke voorbeelden van complementatie.

(8) Voorbeelden van het complement van verzamelingen, waarbij $K = \{a, b\}$, $L = \{c, d\}$ and $M = \{b, d\}$:
a. $K - M = \{a\}$,
b. $L - K = \{c, d\} = L$
c. $M - L = \{b\}$
d. $K - \varnothing = \{a, b\} = K$
e. $\varnothing - K = \varnothing$

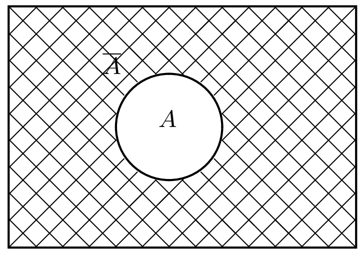
Figuur 2.3 geeft het Venn-diagram van het complement van B in A.



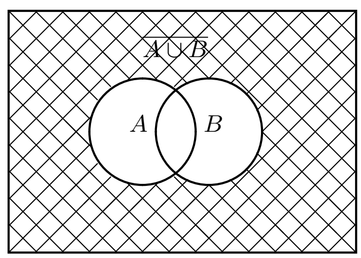
Figuur 2.3: Een Venn-diagram voor het complement $A - B$ van B in A

Figuur 2.3 vertoont grote gelijkenis met de figuur die de betekenis van de zin AaB in de categorische logica weergeeft. Hetzelfde gebied is gearceerd. Net als bij de representatie van $A \cap B$, geldt ook hier dat we ditmaal een *verzameling* aangeven, en niet een propositie. De aangegeven verzameling hoeft ook niet de lege verzameling te zijn, ook al kan dat natuurlijk wel het geval zijn. Als we echter, zoals bij het plaatje in het hoofdstuk over de categorische logica, beweren dat het gebied $A - B$ leeg is, dan betekent dit dat verzameling $A - B$ leeg is, en dat betekent dat alle A B zijn, precies wat een zin van de vorm AaB uitdrukt.

Soms is het niet nodig om de verzameling aan te geven, met betrekking tot welke het complement wordt bepaald. Als de verzamelingen waar we het over hebben allen deelverzameling zijn van een universum $\mathbf{U}$, dan kunnen we simpelweg spreken over het complement van een verzameling A. Deze wordt ook geschreven als $\overline{A}$, en dat is dus feitelijk $\mathbf{U} - A = \{x \in \mathbf{U} \mid x \notin A\}$. Intuïtief is dit de verzameling van al die objecten die niet A zijn. Figuur 2.4 geeft het complement van A in een Venn-diagram aan; bij wijze van illustratie laat figuur 2.5 ook het *complement* van de *vereniging* van A en B zien.



Figuur 2.4: Een Venn-diagram voor het complement $\overline{A}$ van A



Figuur 2.5: Een Venn-diagram voor het complement $\overline{A \cup B}$ van $A \cup B$

Machtsverzameling

De operaties die wij tot nu toe hebben besproken worden allemaal toegepast op twee (of meer) verzamelingen. Nu gaan wij nog een operatie introduceren die slechts één verzameling als argument neemt en een nieuwe verzameling als resultaat levert. Dit is de machtsverzamelings operatie $\wp$. Toegepast op een verzameling A geeft de machtsverzamelings operatie de verzameling van alle deelverzamelingen van A. Dus $\wp(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$. Laat A bijvoorbeeld de verzameling $\{1, 2\}$ zijn. Dan is $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. $\wp(\{1, 2, 3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Onafhankelijk van wat de elementen zijn van de verzameling A waarop de machtsverzamelings operatie wordt toegepast weten we twee dingen zeker: de lege verzameling $\varnothing$ is een element van $\wp(A)$ en A zelf is een element van $\wp(A)$.

Opgave 15. *Gegeven zijn de volgende verzamelingen:*

$A = \{a, b, c, 2, 3, 4\}$	$E = \{a, b, \{c\}\}$
$B = \{a, b\}$	$F = \varnothing$
$C = \{c, 2\}$	$G = \{\{a, b\}, \{c, 2\}\}$
$D = \{b, c\}$	

Geef voor de volgende stellingen aan of zij waar of onwaar zijn.

(a)	$c \in A$	(g)	$D \subset A$	(m)	$B \subseteq G$
(b)	$c \in F$	(h)	$A \subseteq C$	(n)	$\{B\} \subseteq G$
(c)	$c \in E$	(i)	$D \subseteq E$	(o)	$D \subseteq G$
(d)	$\{c\} \in E$	(j)	$F \subseteq A$	(p)	$\{D\} \subseteq G$
(e)	$\{c\} \in C$	(k)	$E \subseteq F$	(q)	$\{\{c\}\} \subseteq E$
(f)	$B \subseteq A$	(l)	$B \in G$		

Opgave 16. *Zij S een willekeurige verzameling.*

(a) *Is S een element van S?*

(b) *Is $\{S\}$ een element van $\{S\}$?*

(c) *Is $\{S\}$ een deelverzameling van $\{S\}$?*

(d) *Geef de verzameling aan waarvan $\{S\}$ het enige element is.*

Opgave 17. *Gegeven zijn de volgende verzamelingen.*

$S_1 = \{\{\varnothing\}, \{A\}, A\}$

$S_2 = A$

$S_3 = \{A\}$

$S_4 = \{\{A\}\}$

$S_5 = \{\{A\}, A\}$

$S_6 = \varnothing$

$S_7 = \{\varnothing\}$

$S_8 = \{\{\varnothing\}\}$

$S_9 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Beantwoord de volgende vragen.

(a) *Welke van de verzamelingen S_1–S_9 zijn elementen van S_1?*

(b) *Welke verzamelingen zijn deelverzamelingen van S_1?*

(c) *Welke verzamelingen zijn elementen van S_9?*

(d) *Welke verzamelingen zijn deelverzamelingen van $S9$?*

(e) *Welke verzamelingen zijn elementen van S_4?*

(f) *Welke verzamelingen zijn deelverzamelingen van S_4?*

Opgave 18. *Gegeven zijn de verzamelingen van opgave 15. Geef de volgende verzamelingen aan door hun elementen op te noemen.*

(a)	$B \cup C$	(g)	$A \cap E$	(m)	$B - A$
(b)	$A \cup B$	(h)	$C \cap D$	(n)	$C - D$
(c)	$D \cup E$	(i)	$B \cap F$	(o)	$E - F$
(d)	$B \cup G$	(j)	$C \cap E$	(p)	$F - A$
(e)	$D \cup F$	(k)	$B \cap G$	(q)	$G - B$
(f)	$A \cap B$	(i)	$A - B$		

Opgave 19. *Gegeven de verzamelingen van opgave 15. Neem aan dat de universele verzameling gegeven is door* $\mathbf{U} = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G$. *Beschrijf de volgende verzamelingen middels opsomming van hun elementen.*

(*a*)	$(A \cap B) \cup C$	(*h*)	$\overline{D} \cap \overline{E}$
(*b*)	$A \cap (B \cup C)$	(*i*)	$F \cap (A - B)$
(*c*)	$(B \cup C) - (C \cup D)$	(*j*)	$(A \cap B) \cup \mathbf{U}$
(*d*)	$A \cap (C - D)$	(*k*)	$(C \cup D) \cap \mathbf{U}$
(*e*)	$(A \cap C) - (A \cap D)$	(*l*)	$C \cap \overline{D}$
(*f*)	$\overline{G}$	(*m*)	$G \cup \overline{F}$
(*g*)	$\overline{(D \cup E)}$	(*n*)	$\overline{(B \cap C)}$

Opgave 20. *Gegeven zijn de volgende verzamelingen:* $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ *en* $C = \{e, e, f\}$.

(*a*) *Geef de volgende verzamelingen aan door opsomming:*

- (*i*) $A \cup B$
- (*ii*) $B \cup \varnothing$
- (*iii*) $A \cap B$
- (*iv*) $A \cap (B \cap C)$
- (*v*) $A \cup (B \cap C)$
- (*vi*) $A - B$
- (*vii*) $C \cup A$

(*b*) *Is* a *een element van* $\{A, B\}$*?*

(*c*) *Is* a *een element van* $A \cup B$*?*

Opgave 21. *Geef de volgende verzamelingen aan door hun elementen op te noemen.*

(*a*)	$\wp(\{a, b, c\})$	(*d*)	$\wp(\{\varnothing\})$
(*b*)	$\wp(\{a\})$	(*e*)	$\wp(\wp(\{a, b\}))$
(*c*)	$\wp(\varnothing)$		

Opgave 22.

(*a*) *Karakteriseer door opsomming twee verzamelingen* A *en* B *zodat:*

- *1.)* A *heeft* 3 *elementen;*
- *2.)* B *heeft* 4 *elementen;*
- *3.) De doorsnede van* A *en* B *heeft* 2 *elementen.*

(*b*) *Hoeveel elementen heeft* $A - B$*?*

(*c*) *Karakteriseer door opsomming een verzameling* C *zodat:*

- (*a*) $A \cap B \subseteq C$
- (*b*) $A \cap B \in C$

Voor alle verzamelingen X, Y en Z geldt:			
1.	Idempotentie	2.	Commutativiteit
	(a) $X \cup X = X$		(a) $X \cup Y = Y \cup X$
	(b) $X \cap X = X$		(b) $X \cap Y = Y \cap X$
3.	Identiteit	4.	Complement
	(a) $X \cup \varnothing = X$		(a) $X \cup \overline{X} = \mathbf{U}$
	(b) $X \cap \varnothing = \varnothing$		(b) $X \cap \overline{X} = \varnothing$
	(c) $X \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$		(c) $\overline{(\overline{X})} = X$
	(d) $X \cap \mathbf{U} = X$		(d) $X \cap \varnothing = \varnothing$
5.	Associativiteit	6.	De Morgan
	(a) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$		(a) $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}$
	(b) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$		(b) $\overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
7.	Distributiviteit		
	(a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$		
	(b) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$		

Tabel 2.1: Wetten van de verzamelingenleer

2.1.7 Wetten van de verzamelingenleer

Gegeven de eigenschappen van de relaties tussen verzamelingen en operaties op verzamelingen die wij tot nu toe hebben geïntroduceerd kunnen een aantal stellingen over verzamelingen worden bewezen.

Een aantal wetten zijn we al tegengekomen.

- Voor alle A: $\varnothing \subseteq A$ en $A \subseteq A$.
- Voor alle A en B: als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$, dan $A = B$.

We kunnen hieraan de volgende algemene observatie toevoegen:

- Voor alle A en B: $A \subseteq B$ desda $A = A \cap B$ desda $A \cup B = B$.

(Ga dit na!)

Sommige van de meest bekende wetten hebben een naam, zie tabel 2.1.

Slotopmerking Een alerte lezer heeft misschien opgemerkt dat hierboven de notie van object een belangrijke rol heeft gespeeld. Maar wij hebben nergens in detail vastgesteld wat een object precies is. Toch moeten we ons beperkingen in welke objecten wij aannemen die gebruikt kunnen worden om verzamelingen mee te construeren. Fysische objecten, getallen, geometrische figuren, gedachten, plaatsen, tijden, zielen en oneindig veel andere entiteiten waarvan het bestaan niet geheel en al probleemloos is kunnen verzamelingen vormen. Maar de vraag of alle verzamelingen van zulke objecten zelf weer objecten vormen zullen wij hier open laten. Dit heeft te maken met verzamelingen als in (9) die wij al eerder hebben besproken: de verzameling van alle verzamelingen die geen element zijn van zichzelf.

(9) $Z = \{x \mid x \text{ is geen element van } x\}$

Zoals eerder uitgelegd leidt de aanname dat Z zelf een object is, waarvoor wij de vraag van elementschap in Z kunnen stellen, tot een logische paradox, beter bekend bekend als Russells paradox, naar de ontdekker Bertrand Russell (1872–1970). Er zijn in de geschiedenis van de wiskunde en logica verschillende mogelijkheden voorgesteld om dit soort tegenspraken te vermijden. Een veilige manier bestaat erin verzamelingen te definiëren als bestaande uit elementen met een karakteristieke eigenschap uit een reeds gegeven verzameling, of domein, D:

$$B = \{x \in D \mid \text{ karakteristieke eigenschap van } x\}$$

Als D een goed gedefinieerde verzameling is, dan is de deelverzameling B van elementen die de genoemde karakteristieke eigenschap hebben ook een goed gedefinieerde verzameling. Omdat het in de meeste voorbeelden in deze syllabus wel duidelijk is binnen welke verzameling of domein D we verzamelingen kiezen, laten we de clausule "$x \in D$" toch ook vaak achterwege.

2.2 Relaties en functies

2.2.1 Lijsten en Paren

Zoals eerder opgemerkt beschrijven $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ dezelfde verzameling, want voor een verzameling maakt het niet uit in welke volgorde de elementen van de verzameling worden opgenoemd. Dit is niet het geval voor **lijsten**. Bij een lijst komt ieder element op een specifiek plaats in de lijst: als het eerste, tweede, derde, vierde, ..., n-e element van de lijst. Lijsten noemen we soms ook wel **geordende verzamelingen**.

Om duidelijk te maken dat het om een lijst gaat, i.e., een geordende verzameling, en niet om een ongeordende verzameling, worden de haakjes '$\langle$' en '$\rangle$, gebruikt. Zo is $\langle 1, 2\rangle$ de lijst met als eerste element 1 en als tweede element 2. $\langle Parijs, 3, Barack\ Obama\rangle$ is de lijst met als eerste element de hoofdstad van Frankrijk, als tweede element het priemgetal 3 en als derde element de president van de Verenigde Staten in 2009. Voor ieder natuurlijk getal n kun je lijsten van n elementen vormen. Lijsten van twee elementen worden ook **geordende paren** genoemd, lijsten met drie elementen **triples**. Voor lijsten met n elementen wordt ook vaak de notie **n-tuple** gebruikt.

2.2.2 Relaties tussen lijsten: Identiteit

Lijsten zijn complexere structuren dan verzamelingen. Hieruit volgt dat identiteit voor lijsten meer condities heeft dan identiteit voor verzamelingen. Om precies te zijn is identiteit voor lijsten gebaseerd op twee criteria. Een lijst a en een lijst b zijn identiek, als (i) de lijsten hetzelfde aantal elementen hebben, en (ii) de elementen die op dezelfde plaats in de lijst staan identiek zijn. Wij schrijven dan $a = b$. Dus de lijst $\langle a, b\rangle$ is niet identiek aan de lijst $\langle b, a\rangle$, maar ook niet identiek aan de lijst $\langle a, b, c\rangle$.

2.2.3 Het Cartesisch Product

Gegeven twee verzamelingen A en B kunnen we een paar (dus een lijst met twee elementen) vormen door als eerste element van de lijst een element uit A en als tweede element een element uit B te kiezen. De verzameling van alle paren die op deze manier gevormd kunnen worden wordt het Cartesisch Product van de verzamelingen A en B genoemd. Wij schrijven het Cartesisch Product van A en B als $A \times B$. Dus $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \text{ en } y \in B\}$. Voorbeelden van het Cartesisch Product worden gegeven in (10).

(10) Zij $K = \{a, b, c\}$ en $L = \{1, 2\}$

$$K \times L = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\}$$
$$L \times K = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\}$$
$$L \times L = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

Omdat het Cartesisch Product zelf weer een verzameling is maakt de volgorde waarop de lijsten die elementen zijn van het Cartesisch product worden genoemd geen verschil. Dus $L \times L$ had net zo goed kunnen worden geschreven als $\{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Wel is de volgorde van de elementen in de lijsten relevant. $K \times L$ en $L \times K$ zijn verschillende verzamelingen!

Het Cartesisch Product kan ook voor meer dan twee verzamelingen gedefiniëerd worden. Gegeven de verzamelingen K en L uit (10) is bijvoorbeeld het Cartesisch Product $K \times L \times L$ de verzameling van alle tripels (lijsten van drie elementen) met op de eerste plaats een element uit K, op de tweede plaats een element uit verzameling L en op de derde plaats weer een element uit de verzameling L. Dus:

$$\begin{aligned} K \times L \times L = \{&\langle a, 1, 1\rangle, \langle a, 1, 2\rangle, \langle a, 2, 1\rangle, \langle a, 2, 2\rangle, \\ &\langle b, 1, 1\rangle, \langle b, 1, 2\rangle, \langle b, 2, 1\rangle, \langle b, 2, 2\rangle, \\ &\langle c, 1, 1\rangle, \langle c, 1, 2\rangle, \langle c, 2, 1\rangle, \langle c, 2, 2\rangle\} \end{aligned}$$

Algemeen kan het Cartesisch Product van n verzamelingen $A_1, A_2, ..., A_n$ gedefiniëerd worden als volgt:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid x_1 \in A_1 \text{ en } x_2 \in A_2 \text{ en } \ldots \text{ en } x_n \in A_n\}$$

Stel nou dat de n verzamelingen allemaal identiek aan A zijn. Dan schrijven wij in plaats van $A \times A \times ... \times A$ kort A^n. Dus het Cartesisch Product $A \times A$ van de verzameling A met zichzelf kan ook worden geschreven als A^2.

2.2.4 Relaties

Wij hebben een natuurlijk begrip van een relatie als iets dat wel of niet twee of meer objecten met elkaar verbindt. Bijvoorbeeld verbindt de relatie *broer van* mensen met hun broers. De relatie *hoofdstad van* verbindt Nederland met Amsterdam en Duitsland met Berlijn maar niet Nederland met Rotterdam. Voorbeelden van relaties die hier in de syllabus al aan bod zijn geweest zijn *identiteit* die verzamelingen met verzamelingen verbindt, of lijsten met lijsten, of *deelverzameling*, de relatie die verzamelingen met verzamelingen verbindt.

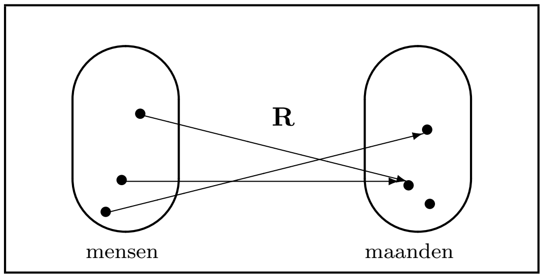
Als wij willen zeggen dat het object a met het object b in de relatie R staat, dan schrijven wij aRb. Dus, bijvoorbeeld, *Amsterdam (is) hoofdstad van Nederland*. Een relatie kan worden beschreven door alle paren van objecten $\langle a, b\rangle$ aan te geven waarvoor geldt dat a in de relatie R met b staat. Bijvoorbeeld de relatie *hoofdstad van* kan worden beschreven als een verzameling $\{\langle \text{Amsterdam}, \text{Nederland}\rangle, \langle \text{Berlijn}, \text{Duitsland}\rangle, \langle \text{Washington D.C.}, \text{VS}\rangle, \dots\}$ van paren waarvan het eerste element een stad en het tweede element een land is. Dus de relatie *hoofdstad van* is een deelverzameling van het Cartesisch Product van de verzameling S van steden en de verzameling L van landen: *hoofdstad van* $\subseteq S \times L$.

Natuurlijk zijn er ook relaties tussen meer dan twee objecten. Bijvoorbeeld de relatie die een getal n en twee steden A en B met elkaar verbindt als n (bijvoorbeeld in kilometers) de afstand tussen A en B is. Of de relatie die een getal n, een student s, een toets t en een vak v met elkaar verbindt als de student s in de toets t van vak v n punten heeft gehaald. Zo zijn er voor ieder natuurlijk getal n relaties die n objecten met elkaar verbinden. Wij noemen deze relaties n-aire relaties. Zij kunnen worden beschreven als verzamelingen van n-tuples. Wij vatten samen:

Definitie 2.2.1. R is een **binaire relatie** tussen de verzamelingen A en B als R een deelverzameling is van het Cartesisch product van A en B: $R \subseteq A \times B$. In het algemeen is R een **n-aire relatie** tussen verzamelingen $A_1, A_2, \dots, A_n$, als R een deelverzameling is van het Cartesisch product van $A_1, A_2, \dots, A_n$: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Binaire relaties kunnen goed visueel worden gerepresenteerd. Dit wordt in figuur 2.6 verduidelijkt met de weergave van een relatie tussen mensen en bijvoorbeeld hun geboortemaand. De relatie wordt geïllustreerd met pijlen. Een pijl loopt van object a naar object b in het geval dat a in de relatie R met b staat.

Relaties kunnen ook objecten uit één en dezelfde verzameling met elkaar verbinden. Zo verbindt de relatie *opvolger van* natuurlijke getallen met elkaar: een natuurlijk getal n met het getal $n-1$. De relatie *broer van* verbindt mensen met mensen. Als een relatie R objecten uit één en dezelfde verzameling met elkaar verbindt, zeggen wij dat R een n-aire relatie is **over** A.



Figuur 2.6: De relatie *geboortemaand*

2.2.5 Eigenschappen van relaties

De meeste relaties die wij in het kader van deze cursus zullen bespreken zijn binaire relaties over een verzameling A. Hierbij zullen wij vaak gebruik maken van bepaalde eigenschappen die deze relaties kunnen hebben. De belangrijkste worden hier geïntroduceerd.

Reflexiviteit

Reflexiviteit is een eigenschap die een binaire relatie over A heeft als de relatie ieder object a van A verbindt met a zelf. Formeel uitgedrukt: voor alle $a \in A$ geldt $\langle a, a \rangle \in R$. Een voorbeeld van een reflexieve relatie is identiteit. Een ander voorbeeld is *minstens zo groot als* over de verzameling mensen. Ieder mens is minstens zo groot als zichzelf. In de grafische representatie van een reflexieve relatie loopt van ieder punt een pijl naar het punt zelf terug.

Is er minstens één element van A waarvoor niet geldt $\langle a, a \rangle \in R$, dan is de relatie niet reflexief. Geldt zelfs voor ieder element van A: $\langle a, a \rangle \notin R$, dan zeggen wij, de relatie is **irreflexief**. Een voorbeeld voor een irreflexieve relatie is de relatie *groter dan* over de verzameling mensen.

Symmetrie

Een relatie heet **symmetrisch** als: wanneer de relatie een object a met een object b verbindt het ook geldt dat de relatie b met a verbindt. Dus voor alle $a, b \in A$ geldt dat als $\langle a, b \rangle \in R$ ook $\langle b, a \rangle \in R$. Grafisch toont zich dit zodanig dat altijd als er een pijl van een punt naar een ander punt loopt, er ook een pijl terug moet lopen. Een voorbeeld voor een symmetrische relatie is *broer van* over de verzameling mannen. Dezelfde relatie is niet symmetrisch over de verzameling mensen. (Vraag: waarom niet?)

Als er nooit een pijl van b naar a terug loopt in het geval dat er wel een pijl van a naar b loopt, dan zeggen wij dat de relatie **asymmetrisch** is. Formeel: voor alle $a, b \in A$ geldt dat als $\langle a, b \rangle \in R$, dan $\langle b, a \rangle \notin R$. Een voorbeeld van een asymmetrisch relatie is *groter dan* over de verzameling mensen. Ook *opvolger van* over de verzameling natuurlijke getallen is asymmetrisch.

Wij spreken van een **antisymmetrische** relatie als alleen dan een pijltje terug loopt van b naar a in het geval dat a en b identiek zijn. Dus voor alle $a, b \in A$ geldt: als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, a\rangle \in R$, dan $a = b$. Antisymmetrie kan worden gezien als een afzwakking van asymmetrie. Een asymmetrische relatie is altijd irreflexief, een antisymmetrische relatie kan ook reflexief zijn. De relatie *groter dan of even groot als* over de verzameling natuurlijke getallen is antisymmetrisch. Maar zij is niet antisymmetrisch over de verzameling mensen. Twee mensen kunnen even groot zijn zonder dat zij identiek zijn. Dit brengt een belangrijk punt naar voren: of een relatie een bepaalde eigenschap heeft of niet hangt af van de verzameling waarover de relatie is gedefiniëerd.

Transitiviteit

Een relatie heet **transitief** als geldt dat als er een pijl loopt van punt 1 naar punt 2 en er een pijl loopt van punt 2 naar punt 3, dan moet er ook een directe pijl zijn van punt 1 naar punt 3. Dus, voor alle $a, b, c \in A$, als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, c\rangle \in R$, dan geldt ook $\langle a, c\rangle \in R$. De relatie *groter dan* over de verzameling mensen is bijvoorbeeld een transitieve relatie: als Maria groter is dan Paul en Paul is groter dan Kim, dan is Maria ook groter dan Kim. De relatie *opvolger van* over de verzameling natuurlijke getallen is niet transitief: 3 is de opvolger van 2, en 2 is de opvolger van 1, maar 3 is niet de opvolger van 1.

Equivalentierelatie

Een **equivalentierelatie** is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is. Voorbeelden van equivalentie relaties zijn 'even groot als' over de verzameling natuurlijke getallen, '$\leftrightarrow$' over de verzameling van formules in propositielogica, of 'dezelfde leeftijd hebben als' over de verzameling mensen. Voorbeelden van relaties over de verzameling mensen die geen equivalentierelaties zijn zijn: 'tweelingbroer van', 'vader van' of 'iets gemeenschappelijk hebben met'. De eerste is niet reflexief, de tweede is niet symmetrisch en de derde is niet transitief. Op equivalentierelaties komen wij in het derde hoofdstuk van de syllabus nog terug.

Samenhang

Ten slotte, noemen we een relatie over de verzameling A **samenhangend** als voor alle elementen a en b van A geldt: of de relatie verbindt a met b, of de relatie verbindt b met a of a en b zijn identiek. Formeel: voor alle $a, b \in A$ geld, $\langle a, b\rangle \in R$ of $\langle b, a\rangle \in R$ of $a = b$. Bijvoorbeeld de relatie kleiner dan over de verzameling natuurlijke getallen is samenhangend. Dezelfde relatie is niet samenhangend over de verzameling mensen. (NB: in de wiskunde worden ook andere begrippen van 'samenhang' gehanteerd.)

Operaties op relaties

We hebben gezien dat relaties, net als verzamelingen, typerende eigenschappen kunnen hebben, en net als op verzamelingen kunnen wij op relaties speciale operaties uitvoeren. Omdat relaties verzamelingen zijn, kunnen we natuurlijk altijd de doorsnede of vereniging van twee relaties nemen, of het complement van een relatie. Maar omdat relaties interne structuur hebben zijn er nog andere interessante operaties mogelijk. De logisch meest gebruikelijke operaties op relaties zijn die van **compositie** en **inverse**. Als R en S relaties zijn over een verzameling A, dan is $R \circ S$, de compositie van R en S, de (kleinste) relatie T over A zodanig dat als $\langle a, b\rangle \in R$ en $\langle b, c\rangle \in S$, dan $\langle a, c\rangle \in T$. Formeel:

$$R \circ S = \{\langle a, c\rangle \mid \text{er is een } b \text{ met } \langle a, b\rangle \in R \text{ en } \langle b, c\rangle \in S\}$$

De compositie van de relatie *kind van* met de relatie *kind van* geeft de relatie *kleinkind van*, en de compositie van de relatie *kind van* met de relatie *kleinkind van* geeft de relatie *achterkleinkind van*.

De operatie van inverse draait simpelweg de paren in de relatie om. Als R een relatie is over A, dan is R^i, de inverse van R, de verzameling van alle paren $\langle b, a\rangle$ zodanig dat $\langle a, b\rangle \in R$. Formeel:

$$R^i = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

De inverse van de kind-van relatie is de ouder-van relatie. We kunnen nu de volgende observaties doen.

1. De inverse van een (ir)reflexieve relatie is (ir)reflexief.
2. De inverse van een (a/anti)symmetrische relatie is (a/anti)symmetrisch.
3. De inverse van een transitieve relatie is transitief.
4. De compositie van twee reflexieve relaties is reflexief.
5. De compositie van twee irreflexieve relaties hoeft niet irreflexief te zijn. (Waarom niet?)
6. De compositie van twee symmetrische relaties hoeft niet symmetrisch te zijn.
7. De compositie van twee a-/antisymmetrische relaties hoeft niet a/antisymmetrisch te zijn.
8. De compositie van twee transitieve relaties hoeft niet transitief te zijn.
9. De inverse van de compositie van R en S is de compositie van de inverse van S en de inverse van R: $(R \circ S)^i = S^i \circ R^i$.

Opgave 23. *Gegeven zijn de volgende verzamelingen:*

$$S1 = \{\{\varnothing\}, \{1, 2\}\}$$
$$S2 = \{1, 2\}$$
$$S3 = \{\varnothing, 2, 3\}$$

Geef de volgende verzamelingen aan door middel van opsomming van de elementen:

(1)	$(S1 \cup S2) \cap (S1 \cup S3)$	(3)	$S1 - S2$	(5)	$S1 - (S2 \cup S3)$
(2)	$S2 \times S1$	(4)	$\wp(S3)$	(6)	$\wp(S1)$

Opgave 24. *Gegeven zijn de volgende verzamelingen:*

$$
\begin{aligned}
S1 &= \{\varnothing, a, b, \{c\}\} & S5 &= \varnothing \\
S2 &= \{a\} & S6 &= \{\varnothing\} \\
S3 &= \{c\} & S7 &= \{\{\varnothing\}\} \\
S4 &= \{a, c\}
\end{aligned}
$$

(a) Welke van de verzamelingen $S1$ - $S7$ zijn elementen van $S1$?

(b) Welke verzamelingen zijn deelverzamelingen van $S1$?

(c) Geef de volgende verzamelingen aan middels opsomming van de elementen:

(1)	$\wp(S6)$	(4)	$S1 - S4$
(2)	$S2 \times S4$	(5)	$S1 - S5$
(3)	$(S2 \cup S3) \cap S1$	(6)	$(S5 \cup S6) \cup S7$

Opgave 25. *Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$.*

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$$

Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitief en/of samenhangend is. Geef de eigenschappen aan die de relatie heeft en ook de eigenschappen die de relatie niet heeft.

Opgave 26. *Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $A = \{a, b, c\}$.*

$$R = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$$

Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitief en/of samenhangend is. Geef de eigenschappen aan die de relatie heeft en ook de eigenschappen die de relatie niet heeft.

Opgave 27. *Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $D = \{1, 2, 3, 4\}$.*

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$

Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitief en/of samenhangend is. Geef de eigenschappen aan die de relatie heeft en ook de eigenschappen die de relatie niet heeft.

Opgave 28. *In deze opgave gaat het om de volgende eigenschappen van relaties:*

reflexiviteit, irreflexiviteit, symmetrie, asymmetrie, antisymmetrie, transitiviteit, samenhangendheid

a. *Onderzoek voor de onder (i) en (ii) genoemde relaties op het domein van alle mensen welke van deze eigenschappen erop van toepassing zijn:*

   (i) *x is op een latere datum geboren dan y;*

   (ii) *x zit met y in dezelfde commissie.*

b. *Beschouw de volgende relatie R op domein $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,2\rangle\}$$

   Ga voor elk van de genoemde eigenschappen van relaties na of het mogelijk is R aan die eigenschap te laten voldoen als (i) en (ii) allebei zijn toegestaan:

   (i) *Hooguit één paar objecten uit het domein D aan R toe te voegen; en*

   (ii) *Hooguit één paar objecten uit R te verwijderen.*

   Motiveer voor elk van de eigenschappen kort uw antwoord, bijvoorbeeld door bij een positief antwoord het bijbehorende gewijzigde model te tekenen.

Opgave 29. *Zij A de verzameling $\{a, b, c\}$ en R een relatie over A met $R = \{\langle b, a\rangle\}$. Het is duidelijk dat R geen equivalentierelatie is; R is bijvoorbeeld niet reflexief. Geef middels opsomming de kleinste relatie S aan met de volgende twee eigenschappen.*

(a) *$R \subseteq S$, en*

(b) *S is een equivalentie relatie.*

Met andere woorden: welke paren van elementen uit A moeten wij minimaal aan R toevoegen zodat het een equivalentierelatie wordt?

2.2.6 Functies

Intuïtief is een functie een soort black box, een proces of operatie waar je aan de ene kant iets instopt, één of meerdere argumenten van de functie, en aan de andere kant krijg je weer iets terug: het resultaat van het toepassen van de functie op de argumenten. Zo ‘maakt’ de functie *optelling* van twee getallen een nieuw getal: de som van de twee getallen. In de verzamelingenleer kan een functie worden beschreven als een relatie met bijzondere eigenschappen. Dit is een abstractere kijk op functies, die wat gewenning vergt.

Stel dat F een relatie is tussen twee verzamelingen A en B: $F \subseteq A \times B$. Welke eigenschappen moet F hebben om een functie te zijn? De eerste eigenschap die wordt gevraagd is dat het resultaat van de functie volledig bepaald wordt door de argumenten van de functie. Dus voor alle mogelijke argumenten moet er precies één resultaat zijn. De tweede eigenschap van functies is dat zij altijd als we iets van de juiste vorm erin stoppen ook een resultaat leveren. Samenvattend:

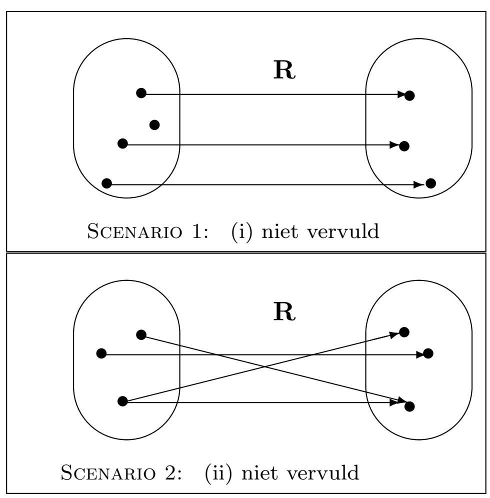
Definitie 2.2.2 (Functie)**.** Een **functie** van verzameling A naar verzameling B is een binaire relatie $F \subseteq A \times B$ zodanig dat:

i. Voor alle $a \in A$ is er een $b \in B$ met aFb (of $\langle a, b\rangle \in F$), en

ii. Voor alle $a \in A$ is er slechts één $b \in B$ met aFb (of $\langle a, b\rangle \in F$).

Wij noemen in dit geval A **het domein** van de functie F en B **het bereik** van de functie en schrijven respectievelijk dom(F) en ran(F).

De relatie *is geboren in maand* tussen de verzameling van mensen en de verzameling van maanden is een functie want (i) ieder mens is in een maand geboren, en (ii) ieder mens is in precies één maand geboren. De relatie *broer van* op de verzameling van mensen is geen functie. Beide condities zijn in dit geval gebroken: (i) niet ieder mens heeft een broer, en (ii) sommige mensen hebben meer dan één broer. De relatie *oudste broer van* scoort al wat beter, want er is altijd slechts één broer de oudste. Dus conditie (ii) is nu vervuld. Maar deze relatie is nog steeds geen functie, want aan conditie (i) is nog steeds niet voldaan: sommige mensen hebben helemaal geen broers, en dus ook geen oudste broer. In figuur 2.7 zijn twee relaties grafisch weergegeven die geen functies zijn. In scenario 1 is de eigenschap (i) niet vervuld, omdat er van sommige puntjes geen pijl weggaat. In scenario 2 is (ii) niet het geval omdat van sommige puntjes twee pijlen weglopen.



Figuur 2.7: Tegenvoorbeelden voor een functie

We weten dat voor een functie F alle elementen uit zijn domein is gedefiniëerd en dat voor ieder element in het domein van F een uniek element uit het bereik van F is geässocieerd, dwz., als a een element is van dom(F) en b het element in ran(F) dat F daarmee associëert dan noemen we a ook wel een **argument** van F en b ook wel de **waarde** van F (met a als argument).

De gebruikelijke notatie hiervoor is $F(a)$, waarin a als het argument van de functie optreedt, en $F(a)$ de waarde geeft: in het voornoemde geval dus $F(a) = b$. Formeel, als F een functie is van A naar B, en a in A, dan geldt:

$F(a) = b$ dan en slechts dan als $\langle a, b\rangle \in F$.

Juist omdat een functie F voor alle A gedefiniëerd is, en een unieke waarde oplevert, is de bovenstaande schrijfwijze correct. Dit betekent ook dat in zo'n geval (te weten, als $\langle a, b\rangle \in F$) we b door $F(a)$ kunnen vervangen, en omgekeerd.

Eigenschappen van functies

Het is voor een functie niet noodzakelijk dat er naar alle punten in het bereik van de functie ook een pijl loopt. Een voorbeeld van een functie waar dit niet het geval is, is de functie $f(x) = x^2$ met domein en bereik de natuurlijke getallen. Er is bijvoorbeeld geen natuurlijk getal n zodanig dat $n^2 = 3$. Dus in 3 komt geen pijl aan. Heeft een functie wel deze eigenschap dan heet de functie surjectief.

Definitie 2.2.3 (Surjectiviteit)**.** Een functie F met domein A en bereik B heet **surjectief**, als geldt: Voor alle $b \in B$ is er een $a \in A$ met $\langle a, b\rangle \in F$.

Het is ook mogelijk dat in een punt in het bereik van een functie F meerdere pijlen aankomen, i.e., dat een functie verschillende argumenten op hetzelfde resultaat afbeeldt. Dit is bijvoorbeeld het geval voor de functie *geboortemaand van*. Heeft een functie de eigenschap dat nooit meerdere pijlen in een punt aankomen, dan heet de functie injectief.

Definitie 2.2.4 (Injectiviteit)**.** Een functie F met domein A en bereik B heet **injectief** als geldt: Voor alle $a_1, a_2 \in A$, met $a_1 \neq a_2$ en $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in F$ geldt $b_1 \neq b_2$.

Met andere woorden: de functie F is injectief als, voor alle a_1, a_2, als $a_1 \neq a_2$ dan $F(a_1) \neq F(a_2)$.

Als we beide eigenschappen samenvoegen kunnen we de notie van bijectieve functies definiëren. Een bijectie van A naar B, ook wel een bijectie tussen A en B, correleert elk element van A met een uniek element van B, en omgekeerd. Het begrip van een bijectie speelt een essentiële rol in de verzamelingentheorie en we zullen hier in hoofdstuk 3.2 dieper op ingaan.

Definitie 2.2.5 (Bijectiviteit)**.** Een functie F heet **bijectief** als F surjectief en injectief is.

Het tegenovergestelde van een injectieve functie is een constante functie, een functie die voor alle argumenten dezelfde waarde oplevert.

Definitie 2.2.6 (Constante functie)**.** Een functie F met domein A en bereik B heet **constant** als geldt: Voor alle $a_1, a_2 \in A$, met $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in F$ geldt $b_1 = b_2$. (Ofwel: voor alle $a_1, a_2 \in A$ geldt $F(a_1) = F(a_2)$.)

Functies met meerdere argumenten

Tot nu toe hebben wij een functie beschreven als een binaire relatie met bijzondere eigenschappen. In dit geval was het eerste element van de relatie het argument van de functie en het tweede element het resultaat. Natuurlijk zijn er ook functies met meer dan één argument. De functie optelling, waarmee wij dit hoofdstuk zijn begonnen, heeft bijvoorbeeld twee argumenten. Onderstaand hebben wij Definitie 2.2.2 gegeneraliseerd zodat meer dan één argument zijn toegestaan.

Definitie 2.2.7 (Functie met meer dan één argument)**.** Een **functie** F van n verzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ naar verzameling B is een n-aire relatie $F \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B$ zodanig dat:

i. Voor alle $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ is er een $b \in B$ met $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, b \rangle \in F$, en

ii. Voor alle $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ is er slechts één $b \in B$ met $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, b \rangle \in F$.

Wij noemen in dit geval $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ **het domein** van de functie F en B **het bereik** van de functie.

Merk op dat een meerplaatsige relatie over enkelvoudige domeinen één op één correspondeert met een éénplaatsige functie over een samengesteld domein. Stel namelijk dat F zo'n meerplaatsige functie is van n verzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ naar verzameling B. De daarmee corresponderende éénplaatsige functie is F' van $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ naar B gedefiniëerd zodanig dat voor alle $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$ geldt:

$$F'(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle) = b \text{ dan en slechts dan als } \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, b \rangle \in F.$$

Operaties op functies

Omdat functies in het huidige perspectief een speciaal soort relaties zijn, kunnen we natuurlijk ook de operaties van compositie en inverse op functies toepassen. Merk op dat de compositie van twee functies automatisch weer een functie oplevert, als het bereik van de eerste functie hetzelfde is als het domein van de tweede functie. Als F een functie is van verzameling A naar verzameling B, en G een functie van verzameling B naar verzameling C, dan is de $F \circ G$ een functie van verzameling A naar verzameling C. Voor elke a in A geldt namelijk dat er een unieke b in B is met $\langle a, b \rangle \in F$, en voor zo'n $b \in B$ geldt dat er een unieke $c \in C$ is met $\langle b, c \rangle \in G$. In dat geval geldt $\langle a, c \rangle \in F \circ G$, de **compositie** van F en G, en voor elke a is deze c ook uniek. $F \circ G$ is derhalve een functie. In de notatie die we hierboven hebben ingevoerd kunnen we dus schrijven:

$$(F \circ G)(a) = G(F(a)).$$

De **inverse** van een functie hoeft echter helemaal geen functie te zijn. Als F een functie is, dan moet, wil F^i een functie zijn, F surjectief zijn. (Ga na waarom.)

F moet ook injectief zijn. (Ga na waarom.) Het blijkt dat deze twee condities voldoende zijn. Zij F een functie van A naar B:

Feit 2.2.8. F^i is een functie van B naar A dan en slechts dan alleen als F surjectief en injectief is, dat wil zeggen, als F een bijectie is.

Opgave 30. *Beschouw de verzamelingen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{a, b, c\}$ en de relaties R_1, R_2, R_3, R_4, en R_5 tussen A en B.*

$R_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, c\rangle\}$
$R_2 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 4, b\rangle\}$
$R_3 = \{\langle 1, c\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, a\rangle\}$
$R_4 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 4, a\rangle\}$
$R_5 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 4, b\rangle\}$

Beantwoordt voor iedere relatie de onderstaande vragen:

(a) *Is de relatie een functie?*

(b) *Als uw antwoord op vraag (a) ja is, ga na of de functie injectief, surjectief en/of constant is. Geef aan welke eigenschappen de functie heeft en ook welke hij niet heeft.*

Opgave 31. *Zij $A = \{a, b\}$ en $B = \{1, 2\}$ verzamelingen.*

(a) *Specificeer de volgende verzamelingen door hun elementen op te noemen.*

i. $A \times B$
ii. $B \times A$
iii. $A \times A$
iv. $(A \times B) \times B$
v. $(A \times B) \times B$
vi. $(A - B) \times (B - A)$

(b) *Geef voor de volgende stellingen aan of zij waar of onwaar zijn*

i. $(A \times B) \times (B \times A) = \varnothing$
ii. $(A \times A) \subseteq (A - B)$
iii. $\langle b, b\rangle \in (A \times A)$
iv. $\{\langle a, 2\rangle, \langle 2, a\rangle\} \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$
v. $\varnothing \subseteq A \times A$
vi. $\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$ *is een functie van A naar B*
vii. $\{\langle b, b\rangle\}$ *is een relatie over A*

Opgave 32. *Stel $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 2\}$ zijn verzamelingen. Hoeveel verschillende relaties zijn er van A naar B? Welke van deze relaties zijn functies? Geef de functies die surjectief zijn. Geef de functies aan die injectief zijn.*

Opgave 33. *Bepaal voor de volgende relaties of ze functies zijn. Geef een tegenvoorbeeld als het geen functies zijn. Geef ook aan of de functies injectief en/of surjectief zijn.*

(a) De relatie telefoonnummer van*, die een mens verbindt met de telefoon nummer van zijn/haar telefoon.*

(b) De relatie Postcode van *die een mens verbindt met de postcode van het adres waar hij/zij staat ingeschreven.*

(c) De relatie moeder van *die een mens verbind met zijn moeder.*

(d) De relatie geboorteplaats van *die een mens verbindt met haar/zijn geboorteplaats.*

Extra opgaven

Opgave 34. *Bewijs dat de inverse van de compositie van R en S de composite van de inverse van S en de inverse van R is:* $(R \circ S)^i = S^i \circ R^i$.

Opgave 35. *Kan een functie van A naar A zowel injectief als constant zijn? Kunnen er meer van zulke functie van A naar A zijn?*

Hoofdstuk 3

Relaties

Vergeleken met de talen van de eerste orde predikatenlogica hebben de categorische talen uit hoofdstuk 1 een zeer beperkte uitdrukkingskracht. Probeer maar eens met categorische middelen het verschil tussen de zin *'Alles heeft een oorzaak'* en de zin *'Er is iets dat oorzaak van alles is'* weer te geven. In de taal van de eerste orde predikatenlogica kan de eerste zin vertaald worden met een formule van de vorm $\forall x \exists y Oyx$ — en iedereen die een cursus eerste orde logica heeft doorlopen, weet dat die wel te onderscheiden is van de formule $\exists y \forall x Oyx$. Maar categorische talen kennen geen relationele predikaten, alleen 'eenplaatsige' termen, en in categorische zinnen komen geen geneste kwantoren voor.

Deze gebrekkige uitdrukkingskracht maakt dat categorische talen ten enenmale ongeschikt zijn voor het analyseren van wetenschappelijk taalgebruik. Geen wonder dat de logica als vak met de opkomst van de moderne natuurwetenschap na de renaissance in een isolement raakte, en daar pas weer uit kon komen na de uitvinding van de eerste orde predikatenlogica door Frege.

U heeft al kennis gemaakt met tweeplaatsige predikaten, en de relaties die ze uitdrukken. U weet dat sommige relaties *symmetrisch* zijn en andere *asymmetrisch*, u kent ook de noties *antisymmetrisch*, *reflexief*, *irreflexief*, *transitief*, en *samenhangend*. Maar u heeft nog niet echt gezien waar al die noties goed voor zijn. Dit hoofdstuk hoopt u daar iets meer inzicht in te geven.

3.1 Equivalentierelaties en abstractie

Vergelijk de zinnen in de linkerkolom met die uit de rechterkolom:

Jan is even lang als Piet	de lengte van Jan = de lengte van Piet
Jan is even zwaar als Piet	het gewicht van Jan = het gewicht van Piet
lijn l is evenwijdig met lijn m	de richting van l = de richting van m
$\triangle$ ABC is congruent met $\triangle$ DEF	de gedaante van $\triangle$ ABC = de gedaante van $\triangle$ DEF
'vrijgezel' is synoniem met 'ongehuwde volwassene'	de betekenis van 'vrijgezel' = de betekenis van 'ongehuwde volwassene'
Algemeen:	
x is even A als y	de A-heid van x = de A-heid van y

In de linkerkolom worden *concrete* objecten met elkaar vergeleken: Jan en Piet, de lijn l met de lijn m, driehoek ABC en driehoek DEF, de uitdrukking 'vrijgezel' en de uitdrukking 'ongehuwde volwassene'. Van deze paren van objecten wordt beweerd dat ze in een bepaalde relatie met elkaar staan: ze zijn even .... Wat de verschillende relaties uit de linkerkolom met elkaar gemeen hebben is dat het zogenaamde *equivalentierelaties* zijn.

Definitie 3.1.1 (Equivalentierelatie)**.** Een relatie E is een *equivalentierelatie* desda E reflexief, transitief en symmetrisch is.

De zinnen uit de rechterkolom hebben met elkaar gemeen dat ze een identiteit uitdrukken. Het zijn echter allesbehalve concrete objecten die gelijk worden gesteld: Jans lengte en Piets lengte, Jans gewicht en Piets gewicht. In de rechterkolom gaat het om relatief gezien abstracte begrippen als 'lengte', 'gewicht', 'gedaante', 'betekenis'.

De zinnen uit de linkerkolom en de corresponderende zinnen uit de rechterkolom zijn onderling verwisselbaar. We hebben ze hier naast elkaar gezet, omdat ze aangeven langs welke weg abstracte begrippen tot stand gebracht kunnen worden. De abstracte kenmerken van ieder object afzonderlijk — zijn lengte, gewicht, vorm — blijken afgeleid te zijn van de concrete relaties die dat object met andere objecten onderhoudt. Hieronder zullen we dat nader uitwerken.

Definitie 3.1.2 (Equivalentieklasse)**.** Zij E een equivalentierelatie op het domein $\mathbf{D}$. Zij a een element van $\mathbf{D}$. We definiëren:

$$[a]_E = \{b \in \mathbf{D} \mid Eab\}$$

De verzameling $[a]_E$ heet de *equivalentieklasse gegenereerd door* a, en bestaat uit alle objecten b in $\mathbf{D}$ waarmee a in de relatie E staat.

Stelling 3.1.3. *Laat E een equivalentierelatie op het domein $\mathbf{D}$ zijn. Dan geldt: elk element van $\mathbf{D}$ is element van precies één equivalentieklasse.*

Bewijs. Elk element van $\mathbf{D}$ is element van minstens één equivalentieklasse. Immers, de relatie E is reflexief, derhalve geldt Eaa voor elke a, en met bovenstaande definitie volgt dan dat a element is van $[a]_E$.

Elk element van $\mathbf{D}$ is element van hoogstens één equivalentieklasse. Neem aan dat a element is van $[b]_E$ én van $[c]_E$. We moeten bewijzen dat deze beide equivalentieklassen identiek zijn. Dat wil zeggen: we moeten bewijzen dat beide equivalentieklassen dezelfde elementen hebben.

Beschouw een willekeurig element x uit $[b]_E$. Op grond van bovenstaande definitie geldt dat Exb. Ook geldt dat Eab, en op grond van de *symmetrie* van E dus ook dat Eba. Uit het feit dat Exb en Eba volgt onder toepassing van de *transitiviteit* van E dat geldt dat Exa. Dit laatste samen met het feit dat Eac levert vanwege dezelfde transitiviteit dat Exc. Met andere woorden x is ook element van $[c]_E$. Op dezelfde manier kun je bewijzen dat een willekeurig element van de equivalentieklasse van c ook element is van de equivalentieklasse van b. □

Uit bovenstaande stelling volgt nu haast onmiddellijk dat voor een willekeurige equivalentierelatie E het volgende geldt:

$$Eab \text{ desda } [a]_E = [b]_E.$$

En dit is — maar nu in precieze termen — het *abstractiebeginsel* dat de overstap van zinnen uit de linkerkolom naar zinnen uit de rechterkolom mogelijk maakt. Het stelt ons in staat objecten die in een bepaalde equivalentierelatie met elkaar staan tot op zekere hoogte te identificeren. Uitgaande van een equivalentierelatie 'even A als' kunnen we een abstract begrip 'A-heid' invoeren, waarbij we ons de A-heid van een object a kunnen voorstellen als de verzameling objecten die even A zijn als a.

Omgekeerd kunnen we stellen dat zulke abstracte begrippen als 'lengte', 'gewicht', 'betekenis', 'aantal', wortelen in zulke concrete relaties als 'even lang', 'even zwaar' etc. Het abstractie beginsel geeft een recept om dergelijke abstracte begrippen te analyseren.

Merk op dat 'abstraheren' in deze zin niets te maken heeft met 'weglaten', 'wegdenken', of 'veronachtzamen'. In de traditionele pre-fregeaanse logica werd abstractie wel in deze laatste zin opgevat. (Men moest wel want in de theorie was geen plaats voor relationele begrippen). Het beeld dat men had van het introduceren van abstracte begrippen als 'lengte' was dit: laat a een willekeurig fysisch object zijn. Als we nu de dikte, de kleur, het gewicht, het materiaal en een aantal andere kenmerken van a — de moeilijkheid met de traditionele opvatting is nu juist dat men niet precies kon aangeven welke kenmerken allemaal — wegdenken, dan houden we een object a' over dat nog maar één kenmerk heeft. Dit object noemen we de lengte van a.

Tegenwoordig denken we geen dingen meer weg. We denken er dingen bij: neem alle objecten die even lang zijn als a. De verzameling die dan ontstaat gedraagt zich precies zo als je dat van de lengte van a zou willen.

3.2 Getal en Oneindigheid

We gaan nu een bijzonder geval bekijken van definitie door abstractie, namelijk de definitie van het begrip 'getal' uit het begrip 'evenveel', zoals dat eind vorige eeuw door Frege en Cantor (onafhankelijk van elkaar) ontwikkeld is. Het bijzondere van die definitie is dat ze niet alleen een manier geeft om grip te krijgen op de getallen die we gebruiken om eindige hoeveelheden te karakteriseren, maar ook toegang geeft tot het oneindige, en een oplossing biedt voor de paradoxen waar het begrip 'oneindig' aanleiding toe heeft gegeven.

Aan de basis van deze onderneming staat het begrip *bijectie*, die wij al eerder gedefinieerd hebben (cf. Definitie 2.2.5). Wat een bijectie is wordt wellicht duidelijk met een eenvoudig voorbeeld. Beschouw de verzameling V van alle getrouwde vrouwen en de verzameling M van alle getrouwde mannen (beide in Nederland). Door middel van de relatie 'getrouwd zijn met' kunnen we een verband leggen tussen deze twee verzamelingen met de volgende karakteristieke eigenschappen:

(i) Bij ieder element a van de verzameling V hoort precies één element b van de verzameling M zodanig dat a getrouwd is met b.

(ii) Bij ieder element b van de verzameling M hoort precies een element a van de verzameling V zodanig dat b getrouwd is met a.

Het zijn deze twee eigenschappen die maken dat we bijvoorbeeld de relatie 'getrouwd zijn met' een bijectie tussen de verzameling A en de verzameling B

zouden kunnen noemen, aangenomen dat ieder persoon in A getrouwd is met iemand in B, en andersom.

(In termen van de predikatenlogica: In een model $\langle \mathbf{M}, \mathbf{I} \rangle$ is de interpretatie van het binaire predikaat R een bijectie tussen de interpretaties van de unaire predikaten A en B, indien de volgende zinnen waar zijn:

(i) $\forall x \forall y (Rxy \to (Ax \wedge By))$;

(ii) $\forall x (Ax \to \exists! y Rxy)$;

(iii) $\forall x (Bx \to \exists! y Ryx)$.)

In een plaatje kunnen we een dergelijke bijectie weergeven door middel van een serie dubbele pijltjes. Stel dat in het onderhavige geval Marie getrouwd is met Jan, Anja met Piet, Beatrix met José, Klaas met Fred, etc., dan krijgen we een plaatje als in Figuur 3.1.

Marie	Beatrix	Anja	Klaas	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Jan	José	Piet	Fred	...

Figuur 3.1: De elementen van twee verzamelingen paarsgewijs gerelateerd.

Een tweede voorbeeld zou zijn als in een zaal iedere stoel bezet is. Dan bestaat er tussen de mensen in die zaal en de stoelen in die zaal een bijectie, middels de relatie 'zitten op'. Zie Figuur 3.2.

de rode stoel	de witte stoel	de stoel links vooraan	de stoel met de kapotte poot	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Jan	Piet	Klaas	Fred	...

Figuur 3.2: De elementen van twee verzamelingen paarsgewijs gerelateerd: tweede voorbeeld.

Merk op: je weet in het bovenstaande gevallen dat er *evenveel* stoelen als mensen in de zaal zijn, maar om dat te weten te komen heb je noch de mensen, noch de stoelen hoeven tellen.

Merk ook op dat het best mogelijk is dat er tussen twee verzamelingen meerdere bijecties bestaan. (Als er twee mensen van plaats verwisselen ontstaat een andere bijectie).

Definitie 3.2.1 (Gelijkmachtig)**.** Voor verzamelingen A en B geldt dat A *gelijkmachtig* is met B dan en slechts dan als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Het begrip *gelijkmachtigheid* werd door Cantor ingevoerd als de theoretische uitwerking van de notie van 'even groot'. Dat twee verzamelingen van gelijkmachtigheid zijn wil zeggen dat de twee verzamelingen in kwestie 'even groot' zijn, of 'evenveel elementen hebben', maar deze notie zegt niets over de 'absolute grootte' — het aantal elementen — van deze verzamelingen.

Wil 'het bestaan van een bijectie' gekwalificeerd zijn als een definitie van 'evenveel' dan zal het op zijn minst een equivalentierelatie moeten zijn (in het domein van alle verzamelingen). Dit is inderdaad het geval. Ten eerste is de gelijkmachtigheidsrelatie *reflexief*. Voor elke verzameling A geldt dat er een bijectie bestaat tussen A en A: neem de identiteitsrelatie. Ook is de relatie *symmetrisch*, als R een bijectie is tussen A en B, dan is de 'omgekeerde' relatie $\tilde{R}$ — gedefiniëerd als: $\tilde{R}xy$ desda Ryx — een bijectie tussen B en A. Tenslotte is de relatie ook *transitief*. Als er een bijectie bestaat tussen A en B, en ook een tussen de B en C, dan ook tussen A en C. Je kunt de twee gegeven bijecties immers aan elkaar koppelen. Preciezer: als R en S de betreffende bijecties tussen A en B en tussen B en C zijn, dan met T gedefiniëerd als $R \circ S$ een bijectie tussen A en C gegeven.

Beschouw nu de volgende bijectie:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots
\end{array}$$

Figuur 3.3: De elementen van twee verzamelingen paarsgewijs gerelateerd: derde voorbeeld.

Figuur 3.3 illustreert een bijectie geschetst tussen de natuurlijke getallen en de positieve natuurlijke getallen.[1] Volgens onze definities betekent dit dat deze verzamelingen evenveel elementen hebben. Maar de tweede is een echte deelverzameling van de eerste! Stel je voor: je hebt een aantal dingen, je gooit een ervan weg, en toch houd je evenveel dingen over — dat is toch raar!

Het kan nog raarder:

[1] De verzameling natuurlijke getallen is de verzameling $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Opgave 36. *Bewijs de volgende beweringen:*

(a) *De verzameling natuurlijke getallen,* $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$*, is gelijkmachtig met de verzameling* even *natuurlijke getallen* $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

(b) *De verzameling van de gehele getallen,* $\{\ldots, -3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$*, is gelijkmachtig met de verzameling van de natuurlijke getallen.*

Galilei had lang voor Cantor al bedacht dat de notie 'evenveel' te definiëren is in termen van het bestaan van een bijectie, maar voor hem waren de bovenstaande resultaten zo paradoxaal dat hij de toepassing op oneindige verzamelingen verwierp. Voor Cantor en Frege was die toepassing op het oneindige juist het aantrekkelijke. Sterker, je zou 'oneindig groot' zelfs kunnen definieren door te stellen: een verzameling is oneindig groot desda hij gelijkmachtig is met een echte deelverzameling van zichzelf.

Hebben alle oneindige verzamelingen nu evenveel elementen? Of zijn er gradaties in oneindigheid? De bovenstaande resultaten doen u wellicht vermoeden dat het eerste het geval is, en het volgende voorbeeld versterkt dat vermoeden wellicht nog.

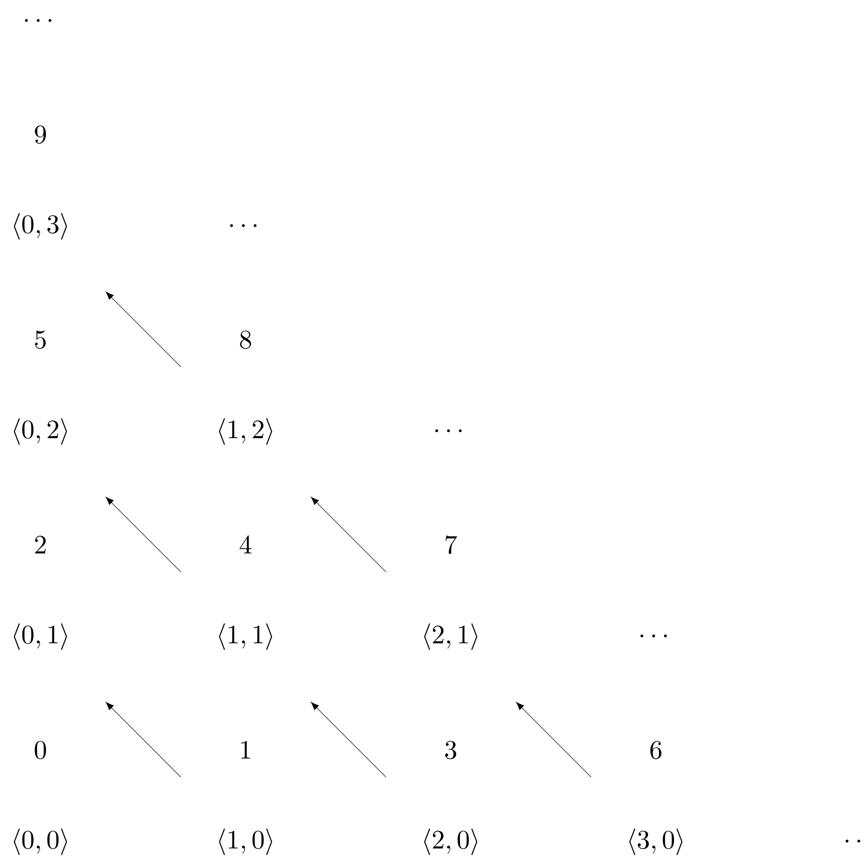
Stelling 3.2.2. *Er zijn evenveel natuurlijke getallen als rationale getallen.*

Voor de goede orde: rationale getallen zijn getallen die te schrijven als een breuk, bijvoorbeeld 1/4, -2/3, 298563/348, etc. Het verrassende van de stelling zit hem hierin dat bij een normale rangschikking naar grootte er tussen elke twee natuurlijke getallen oneindig veel rationale getallen liggen. Dat suggereert dat er veel en veel meer rationale getallen zijn dan natuurlijke getallen. Echter, je kan de rationale getallen ook nog op andere wijzen rangschikken, en in het bewijs van de stelling gebeurt dat ook.

Bewijs. We beperken ons tot het laten zien dat er een bijectie bestaat tussen $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$, d.w.z. de verzameling van alle geordende paren van natuurlijke getallen en natuurlijke getallen. (Merk op dat je een breuk kan zien als een geordend paar van natuurlijke getallen). Beschouw Figuur 3.4.

Elk paar $\langle n, m\rangle$ is ergens in het bovenstaande 'rooster' terug te vinden. Wanneer we nu dat rooster doorlopen op de wijze die de pijlen aangeven, en bij elk 'volgende' roosterpunt het volgende natuurlijke getal zetten, dan verkrijgen we een bijectie tussen $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$.

(Als u het preciezer wil: Het punt $\langle m, n\rangle$ ligt op de $(m+n+1)^e$ antidiagonaal, de nul-diagonaal meegeteld. Voor een willekeurig punt $\langle m, n\rangle$ zijn er dus $(m+n)$ complete antidiagonalen. Op deze diagonalen liggen $1 + 2 + \ldots + (m + n)$, ofwel $\frac{1}{2}(m + n)(m + n + 1)$ punten. Het punt $\langle m, n\rangle$ wordt op zijn eigen antidiagonaal nog voorafgegaan door n punten. En dus wordt $\langle m, n\rangle$ voorafgegaan door precies $\frac{1}{2}(m + n)(m + n + 1) + n$ punten. Wanneer we nu R definiëren als de relatie die aan elk paar $\langle m, n\rangle$ het getal $\frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2 + m + 3n)$ toevoegt, dan is R een bijectie tussen $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$. (Deze bijectie beeldt een willekeurig punt $\langle m, n\rangle$ af op het aantal punten dat aan $\langle m, n\rangle$ vooraf gaat als we $\mathbb{N}^2$ ordenen op de wijze die in bovenstaande figuur wordt weergegeven.) $\square$



Figuur 3.4: Een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^2$.

Na het bovenstaande lijkt het dat het antwoord op de vraag of er überhaupt oneindige verzamelingen bestaan die niet gelijkmachtig zijn met de natuurlijke getallen ontkennend zal zijn. Maar nee, er zijn meerdere soorten van oneindigheid. De volgende stelling geeft hier uitsluitsel over.

Stelling 3.2.3 (Stelling van Cantor)**.** *Zij A een willekeurige verzameling. Er is geen bijectie tussen A en de machtsverzameling van A, i.e. $\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.*

Bewijs. Uit het ongerijmde. Neem aan dat er een bijectie R bestaat tussen A en $\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Beschouw de verzameling B gedefiniëerd als:

$$B = \{z \in A \mid z \notin V \text{ voor de unieke } V \text{ zodanig dat } RzV\}$$

Er geldt dat $B \subseteq A$, en omdat R een bijectie is moet gelden dat er een $u \in A$ bestaat zodanig dat RuB. Maar dan geldt op grond van de definitie van B dat:

$$u \in B \Longleftrightarrow u \notin V \text{ voor de unieke } V \text{ zodanig dat } RuV.$$

En op grond van het feit dat RuB dat:

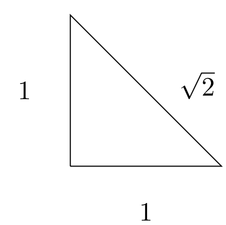
$$u \in B \Longleftrightarrow u \in V \text{ voor de unieke } V \text{ zodanig dat } RuV.$$

Contradictie. □

De stelling leert ons onder andere dat de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen meer elementen heeft dan $\mathbb{N}$. Dat is helaas een nogal abstract voorbeeld. Het volgende spreekt wellicht iets meer aan.

Stelling 3.2.4. *Er is geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Anders gezegd: de punten op een rechte lijn zijn niet aftelbaar.*

Terzijde. Voordat we ons met het bewijs van deze stelling gaan bezig houden, is het wellicht nuttig u eraan te herinneren dat we de punten op een rechte lijn dikwijls representeren met reële getallen. (We spreken in dat verband van de reële getallenrechte). Het was al aan de Pythagoreeërs bekend dat we die punten niet kunnen representeren met rationale getallen. Tot dat inzicht kwamen ze als volgt.

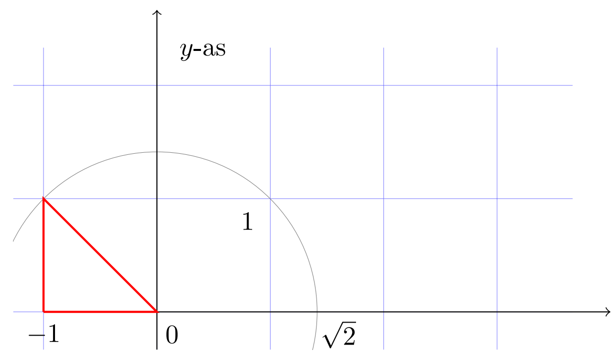


Figuur 3.5: De stelling van Pythagoras.

De stelling van Pythagoras leert dat in de driehoek de lengte van de schuine zijde $\sqrt{2}$ maal zo lang is als één van de korte (cf. Figuur 3.5). Bekijk dit nu eens in een coördinatenstelsel (cf. Figuur 3.6). Als we de schuine zijde omcirkelen, dan snijdt die cirkel de x-as ergens in een punt. Dat punt zouden we graag representeren met een getallenpaar, en dat kan ook: het betreft hier het punt $\langle\sqrt{2}, 0\rangle$.

Waar het om gaat is dat we dat punt niet zouden kunnen representeren met dit getallenpaar, als we alleen maar van rationale getallen gebruik zouden kunnen maken: $\sqrt{2}$ is namelijk geen rationaal getal.[2]

[2]Het bewijs van deze laatste stelling wordt aan Euclides toegeschreven, en gaat als volgt. Stel dat er wel een rationaal getal x bestaat zodanig dat $x^2 = 2$. Neem aan dat de breuk $\frac{m}{n}$



Figuur 3.6: De stelling van Pythagoras in een coördinatenstelsel.

Uit het feit dat er op een rechte lijn punten liggen die geen rationale coördinaten hebben, volgt natuurlijk nog niet dat er méér punten op die lijn liggen dan er rationale getallen zijn. Toch is dat zo, en het bewijs van die stelling danken we aan Cantor, die er eeuwige roem mee verworven heeft. Het was het eerste bewijs dat liet zien dat er oneindige verzamelingen bestaan die niet gelijkmachtig zijn.

Bewijs van Stelling 3.2.4. Alle punten op een rechte lijn kunnen worden weergegeven met een reëel getal, en alle reële getallen kunnen worden weergegeven met een oneindig doorlopende decimale breuk. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,333333333333\ldots \\ \frac{1}{2} &= 0,500000000000\ldots \\ \pi &= 3,1415927\ldots \\ \sqrt{2} &= 1,4142135\ldots \end{aligned}$$

Beschouw nu alle reële getallen tussen 0 en 1. We zullen laten zien dat er geen bijectie bestaat tussen deze verzameling en de natuurlijke getallen.[3] Daartoe beschouwen we een willekeurige *functionele* relatie R tussen de natuurlijke getallen enerzijds en de reële getallen tussen 0 en 1 anderzijds — d.w.z. een relatie waarvoor geldt dat er bij elk natuurlijk getal n hoogstens één reëel getal r te

aan de gestelde eis voldoet. We mogen aannemen dat m en n zo gekozen zijn dat ze geen gemeenschappelijke deler hebben. Als $(\frac{m}{n})^2 = 2$ dan geldt: $m^2 = 2n^2$ en dus: m^2 is even. Als m^2 even is, dan is m ook even. Neem aan dat $m = 2l$. Dan geldt: $4l^2 = 2n^2$, met andere woorden, $n^2 = 2l^2$. Derhalve is n^2 even en daarmee n ook: m en n zijn dus beide even. Dit in tegenstelling tot onze aanname dat m en n geen gemeenschappelijke deler zouden hebben. Contradictie.

[3]Het zal duidelijk zijn dat dat voldoende is. Een verzameling kan nooit minder elementen hebben dan een echte deelverzameling ervan. (Overigens: het is niet moeilijk te bewijzen dat de verzameling van alle reële getallen gelijkmachtig is met de verzameling van alle reële getallen tussen 0 en 1).

vinden is zodanig dat Rnr. We zullen laten zien dat er altijd een reëel getal bestaat dat met geen enkel natuurlijk getal verbonden wordt.

Eenvoudiger gesteld: kies bij elk natuurlijk getal een reëel getal. U kunt dat nooit zo doen dat alle reële getallen aan de beurt komen. Kijk maar, hieronder is zo'n mogelijke keuze in beeld gebracht.

1	$\longleftrightarrow$	0, **2** 8 4 9 8 6 5 3 1 1 4 6...
2	$\longleftrightarrow$	0, 8 **7** 6 5 4 4 4 4 3 9 6 9 8...
3	$\longleftrightarrow$	0, 7 7 **7** 7 3 1 2 2 5 3 4 6 0...
4	$\longleftrightarrow$	0, 7 7 7 **1** 0 1 0 4 9 7 2 8 7...
5	$\longleftrightarrow$	0, 6 5 2 3 **2** 4 2 5 2 6 2 7 2 8...
6	$\longleftrightarrow$	0, 5 5 1 6 6 **1** 3 1 4 2 2 2 7 6...
7	$\longleftrightarrow$	0, 0 0 0 4 5 0 **9** 4 3 0 0 2 1 1...
8	$\longleftrightarrow$	0, 0 0 0 0 0 0 0 **0** 0 7 6 4 5 5...
9	$\longleftrightarrow$	0, 9 9 9 8 8 8 7 7 **7** 6 3 4 5...
10	$\longleftrightarrow$	0, 1 1 2 3 5 8 1 3 2 **1** 3 4...
...	$\longleftrightarrow$	...

Neem nu de eerste decimaal van het eerste getal, de tweede decimaal van het tweede getal, de derde decimaal van het derde getal enzovoorts. De betreffende getallen zijn dik gedrukt en door ze achter elkaar te schrijven krijg je een reëel getal:

0, 2 7 7 1 2 1 9 0 7 1...

Beschouw nu een reëel getal dat in elke decimaal van dit getal verschilt. Bijvoorbeeld:

0, 8 3 3 9 8 9 1 6 3 5...

Claim: dit laatste getal komt nergens in de bovenstaande lijst voor. Het kan niet bij 7 gekozen zijn, want het verschilt in de 7de decimaal van het getal dat bij 7 gekozen is, het kan niet bij 25 gekozen zijn want het verschilt in de 25e decimaal van het getal dat bij 25 gekozen is, het kan bij geen enkel getal n gekozen zijn want het verschilt in de n-de decimaal van het getal dat bij n gekozen is. M.a.w. er is tenminste één reëel getal dat niet gepaard is met een natuurlijk getal. Dit betekent dat er geen surjectie is en dus ook geen bijectie. $\square$

Het zal duidelijk zijn dat deze methode, genaamd de diagonale methode, altijd werkt: hoe die oneindige lijst er ook uitziet, er is altijd een reëel getal tussen 0 en 1 te vinden dat er niet op staat. Er bestaat geen bijectie tussen de natuurlijke getallen en de reële getallen tussen 0 en 1.

We hebben nu gezien dat het begrip 'evenveel' precies gedefiniëerd kan worden, en dat dat begrip ook voor oneindige verzamelingen zin heeft. Cantor, met

Frege in zijn voetspoor, ging één stap verder. Zij wilden, uitgaande van dit begrip tot het abstracte begrip 'aantal' komen. De wijze waarop ze dachten deze doelstelling te realiseren is globaal de volgende.

De gelijkmachtigheidsrelatie heeft de eigenschappen van een equivalentierelatie. Bij de bespreking van equivalentierelaties hebben we gezien hoe je uitgaande van, bijvoorbeeld, de notie 'groter dan' het abstracte begrip 'lengte' kan invoeren; door de relatie 'even groot als' te beschouwen als een equivalentierelatie, kan de 'lengte' van een object a worden voorgesteld als de verzameling objecten die 'even lang' zijn als 'a'.

Op precies dezelfde wijze dacht Cantor het begrip 'aantal' (kardinaalgetal) te kunnen invoeren. Hij begreep het *aantal* elementen van een verzameling A als "the general concept which by means of our active faculty of thought arises from the aggregate A when we make abstraction of the nature of its various elements and of the order in which they are given." En dit "general concept" of kardinaalgetal, zo werd verondersteld, kan begrepen worden als de equivalentieklasse die door A onder de gelijkmachtigheidsrelatie wordt gegenereerd. Met andere woorden, het kardinaalgetal van een verzameling A is de verzameling van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met A. Het getal 1 kan dan gelijkgesteld worden met de "verzameling" van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\{\varnothing\}$; het getal 2 met de verzameling van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, etc.

Een briljant idee, maar helaas in deze vorm niet houdbaar. Het veronderstelt namelijk dat de verzameling van alle verzamelingen een object is waar zinvol over kan worden gesproken. Dit is niet zo, zoals beargumenteerd in Hoofdstuk 2. De extensie van het gelijkmachtigheidspredikaat is geen verzameling en de kardinaalgetallen van Cantor en Frege bestaan dan ook niet. Het idee dat men de *echte* getallen 1, 2, etc. kan zien als equivalentieklassen heeft men dan ook laten varen.

Hoofdstuk 4

Modale Logica

> Diese Ursache muss überdies Verstand haben: (...) denn da diese existierende Welt zufällig ist, und da eine Unendlichkeit von anderen Welten ebenso möglich ist und ebenso sehr wie sie (sozusagen) Anspruch auf Existenz macht, so muß die Ursache der Welt auf alle diese möglichen Welten Rücksicht genommen oder zu ihnen in Beziehung gestanden haben, damit sie für eine von ihnen entscheiden konnte.
>
> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), *Studien zur Theodizee. Über die Güte Gottes, die Freiheit des Menschen und den Ursprung des Übels*, 1710, Erster Zeil, § 7.

> The rhetorical force of Lewis's [David Lewis (1941 – 2001), *eds.*] argument is in the suggestion that possible worlds are really not such alien entities as the metaphysical flavor of this name seems to imply. The arguments suggest not that ordinary language and our common belief commit us to a weighty metaphysical theory, but rather that what appears to be a weighty metaphysical theory is really just some ordinary beliefs by another name. Believing in possible worlds is like speaking prose. We have been doing it all our lives.
>
> Robert Stalnaker, *Possible worlds*, Noûs, Vol. 10:1, 1976, p. 66.

4.1 Inleiding

Sommige waarheden lijken slechts "contingent" waar te zijn: bijvoorbeeld het feit dat het op dit moment niet regent. Dit had ook anders kunnen zijn. Andere waarheden lijken echter "noodzakelijk" waar te zijn. Bijvoorbeeld het feit dat je niet iemand anders bent. In dit hoofdstuk bespreken we zogenaamde *modale begrippen*. Voorbeelden van modale begrippen zijn 'noodzakelijkheid', 'mogelijkheid', 'verplichting', 'weten', 'hopen', en vele andere meer. Heel globaal zouden we kunnen zeggen dat modale begrippen een manier (*modus*) specificeren waarop een stand van zaken geëvalueerd moet worden. Modale begrippen zijn voor de filosofie, zowel praktisch als ook theoretisch, uitermate belangrijk. Ze komen voor in veel belangrijke vragen en beweringen in de filosofie. Het probleem is echter dat met de formele talen die we tot nu toe hebben bestudeerd, we de eigenschappen van modale begrippen formeel niet goed weer kunnen geven.

De reden waarom we modale begrippen niet kunnen uitdrukken in een van de talen die we tot nu toe hebben gezien is dat modale begrippen niet waarheidsfunctioneel zijn. Om dit duidelijk te maken zullen we twee voorbeelden bekijken.

(1) Klaas verzorgt zijn zieke moeder niet.

(2) Klaas moet zijn zieke moeder verzorgen.

Zin (1) zegt dat het niet het geval is dat Klaas zijn zieke moeder verzorgt. In de logica's die we tot nu toe bestudeerd hebben zijn zinnen waar of onwaar op basis van wat feitelijk het geval is, i.e., op basis van de valuatie van de propositionele constanten. Zin (1) is dus waar als de subformule, dat Klaas zijn zieke moeder verzorgt, onwaar is.

De betekenis van zinnen hebben we gedefiniëerd in termen van waarheidscondities: De zin 'Klaas verzorgt zijn zieke moeder' is waar desda dat wat de zin uitdrukt ook aan de hand is.

Zin (2) is een voorbeeld van een *deontische uitspraak*. Dit zijn zinnen waarin wordt uitgedrukt wat mag en wat moet.[1] Als we echter kijken naar zin (2) en dezelfde analyse proberen toe te passen die we hebben toegepast op zin (1) zien we dat dit niet werkt. Stel bijvoorbeeld dat Klaas niet de ideale zoon is en zijn moeder niet verzorgt, kunnen we dan zeggen dat (2) onwaar is? Of stel dat Klaas wel die goeie zoon is en zijn zieke moeder wel verzorgt. Is dit dan de reden waarom we kunnen zeggen dat (2) wel waar is? De waarheid van een deontische uitspraak (en van modale uitspraken in het algemeen) lijkt niet te berusten op wat het geval is en dit is de reden waarom een waarheidsfunctionele semantiek ons niet kan helpen.

Als modale zinnen niet waarheidsfunctioneel zijn, dan is de vraag natuurlijk hoe we ze dan wel moeten analyseren? Hier komt de notie van *mogelijke wereld* om de hoek kijken. Als we nog eens kijken naar zin (2) dan zegt deze zin niet iets over wat het geval is maar eerder iets over wat het geval *zou moeten zijn* ook als dat niet het geval is. Vergelijkbaar, als we kijken naar een zin als

(3) Het is mogelijk dat Martin nog niet thuis is.

dan zegt (3) niet iets over wat werkelijk het geval is maar wat het geval zou kunnen zijn. De notie van een mogelijke wereld zal ons helpen te representeren wat het geval is maar ook de verschillende mogelijke manieren waarop het anders had kunnen zijn.

In de eerste aangehaalde passage spreekt Leibniz over 'mogelijke werelden'. Bij Leibniz geschiedt dit nog binnen een tamelijk filosofisch-(theo-)logisch kader. De tweede passage van Stalnaker komt uit een discussie over wat nu de metafysische status is van die mogelijke werelden. In de modale logica wordt de notie van een 'mogelijke wereld' vanwege haar intuïtieve toegankelijkheid gebruikt, om op een formele en systematische manier duidelijkheid te verkrijgen over verschillende *modale begrippen*, zoals 'noodzakelijkheid', 'mogelijkheid', 'verplichting' en 'weten' wat verhelderend werkt voor het begrip van de logica's van deze modale begrippen.

In het vervolg van deze sectie definiëren we de syntaxis van de modale logica waar we mee gaan werken en bespreken we de filosofisch-logische intuïties achter de modale logica. In secties 4.2 bespreken we de meest gangbare formele uitwerking van de semantiek van de modale logica, die van Saul Kripke. Sectie 4.3 geeft vervolgens aan op welke wijze zogenaamde (Kripke) modellen en frames ons kunnen helpen onze ideeën over verschillende modaliteiten te verhelderen. In sectie 4.4 bespreken we kort enige voor de hand liggende en aantrekkelijke varianten van de modale logica. Tenslotte staan in de Appendix bewijzen van

[1] In sectie 4.4 zullen we wat uitgebreider kijken naar verschillende modale uitspraken waaronder deontische uitspraken.

een aantal stellingen die we bespreken in de loop van dit hoofdstuk.

4.1.1 De taal van de modale propositielogica

De centrale begrippen in de modale logica zijn 'mogelijkheid' en 'noodzakelijkheid'.[2] Om deze begrippen formeel weer te geven, gebruikt de modale logica de twee operatoren $\Diamond$ en $\Box$. Deze operatoren worden gecombineerd met de formules van de propositielogica, die we al kennen. Deze uitbreiding van de propositielogica noemen we de *modale propositielogica*. Als p een propositieletter is, dan staat de formule $\Diamond p$ in eerste instantie voor *Het is mogelijk dat* p en de formule $\Box p$ voor *Het is noodzakelijk dat* p. Analoog aan de definitie van de taal L van de propositielogica definiëren we de taal van de modale propositielogica ML als volgt.

Definitie 4.1.1 (Taal van de modale propositielogica)**.** Zij PROP een verzameling propositieletters. We duiden propositieletters aan met $p, q, r, \ldots$, etc.

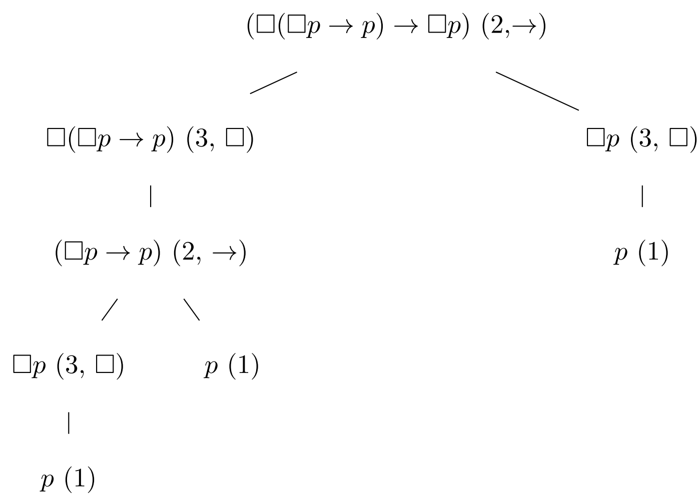
1. Als $p \in \mathsf{PROP}$, dan is p een formule van ML;
2. Als ϕ en ψ formules van ML zijn, dan zijn $\neg\phi$, $\neg\psi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ dat ook;
3. Als ϕ een formule van ML is dan zijn $\Diamond\phi$ en $\Box\phi$ dat ook;
4. Niets is een formule van ML als het niet in een eindig aantal stappen gegenereerd is door bovenstaande clausules 1–3.

Hieronder staan voorbeelden van formules van de modale propositielogica aan de linkerkant, rechts voorbeelden van symboolrijtjes die *geen* formules van de modale propositie zijn:

$\varphi \in ML$	$\varphi \notin ML$
p	pp
$p \wedge \neg q$	$p\neg q$
$\Diamond p \to \Box q$	$\Diamond p \Diamond \to \Box q$
$\Box\Box p$	$\Box\Box$
$\Diamond(p \wedge \neg\Box q)$	$\Diamond(\Box \wedge \neg\Box q)$

De recursieve definitie van de taal ML stelt ons in staat om eenvoudig een formule te ontleden en daarmee een *unieke* constructieboom te associëren. Hieronder geven we een voorbeeld van een constructieboom, waar we achter iedere (sub-)formule tussen haakjes aangeven met behulp van welke regel uit definitie 4.1.1 we de (sub-)formule hebben geconstrueerd.

[2]Traditioneel worden in de modale logica uitspraken als 'het is mogelijk dat p' en 'het is noodzakelijk dat p' bestudeerd. Een ontwikkeling die terug te voeren is naar Aristoteles. (Cf. *Analytica Priora* 1.8–2.22 & *De Interpretatione* 12–13.) Tegenwoordig wordt met modale logica een *familie* van verwante logica's bedoeld waarin verschillende modale begrippen worden bestudeerd.



Figuur 4.1: Constructieboom van een formule

De uiterste haakjes om een formule laten we meestal achterwege, mits dit niet tot verwarring kan leiden. Bijvoorbeeld de formule $(\Box\phi \to \phi)$ kunnen we ook schrijven als $\Box\phi \to \phi$ zonder dat er ambiguïteit optreedt. Dit is dezelfde conventie die we eerder gezien hebben (cf. L.T.F. Gamut, Vol. 1, §2.3).

Opgave 37. *Bepaal van de volgende symboolrijtjes of het formules van de modale propositielogica zijn. Houd daarbij rekening met de conventie over het weglaten van haakjes. Is het symboolrijtje volgens u een formule, geef dan de constructieboom.*

(i)	$\Box\Box\Box\Diamond p$	*(vi)*	$\neg\Box\Diamond p \to q$
(ii)	$\Diamond p \Diamond q$	*(vii)*	$\neg\Box\Diamond(p \to q)$
(iii)	$\Diamond(p \wedge \Box q)$	*(viii)*	$\neg\Box\Diamond p \neg \to q$
(iv)	$q \to r\Box$	*(ix)*	$p\Box q$
(v)	$\neg q$	*(x)*	$\neg\Box\neg(\Diamond p \wedge q)$

4.1.2 Modale operatoren en hun verschillende interpretaties

Alleen met de twee operatoren $\Diamond$ en $\Box$ bestrijkt de modale propositie logica al een heel breed gebied, want er zijn veel verschillende manieren waarop iets 'mogelijk' of 'noodzakelijk' kan zijn. Bijvoorbeeld kun je ook in niet-filosofische gezelschap de volgende dingen horen en zeggen:

1. Nee, hoor, dat is *niet mogelijk*. Hans kan niet zowel lang als ook klein zijn.

2. Het *niet mogelijk* om een vak meer dan drie keer te herkansen.
3. Ik weet niet of Johannes de goudvis nog leeft. Het is *mogelijk* dat Mathilda's kat hem heeft opgevreten.
4. Als je naar Bloemendaal wilt, is het ook *mogelijk* om te fietsen. Dat is niet zo ver.

Stelling 1 gaat over logische mogelijkheid. Stelling 2 gaat over mogelijkheden die gedefinieerd worden door een stel regels, zoals die van de universiteit. Stelling 3 gaat over subjectieve mogelijkheid vanuit het oogpunt van iemand met beperkte informatie. Stelling 4, ten slotte, gaat over mogelijkheden van acties gegeven het vermogen van degene die een actie wilt uitvoeren en bepaalde doeleinden heeft. Desalniettemin kunnen al deze zinnen vertaald worden naar een formule van de vorm $\neg\Diamond p$ (voor stellingen 1 en 2) of $\Diamond p$ (voor stellingen 3 en 4). We zien dus dat $\Diamond$, net als het woordje 'mogelijk' in de betreffende stellingen zelf, wel een constante betekenis, maar ook lichtelijk verschillende betekenisnuances moeten hebben in elke van de vier gevallen. Wat constant blijft is dat in elke zin wordt beweerd of bestreden dat een bepaalde mogelijkheid bestaat. Wat verandert is over wat voor een type mogelijkheid het gaat. Om het in de terminologie van de predikatenlogica te beschrijven: in elke zin hebben wij te maken met een existentiële kwantor over mogelijkheden (al dan niet met een negatie ervoor). Maar in elke zin kwantificeert deze exitentiële kwantor over een ander domein. Dit domein noemen wij de *modale basis* van een modale operator $\Diamond$. De modale basis van de modale operator in de eerste zin is bijvoorbeeld de verzameling van alle logische mogelijkheden. De modale basis van de modale operator in de tweede zin is de verzameling van mogelijkheden die in overeenstemming zijn met de regels van de universiteit.

Hetzelfde punt kan ook worden gemaakt met zinnen waarin wordt beweerd dat iets noodzakelijk (of niet noodzakelijk) het geval is. Ook hier blijft iets in de betekenis constant: er wordt altijd beweerd dat iets geldt voor alle mogelijkheden die worden onderscheiden (vergelijkbaar met een universele kwantificatie over mogelijkheden). Maar ook hier observeren wij dat de verzameling van mogelijkheden waarover wordt gekwantificeerd kan verschillen per zin. Ook de modale operator $\Box$ kan dus verschillende modale bases hebben. Om dat te verduidelijken, kijken we in het volgende iets uitgebreider naar verschillende soorten modaliteiten en hun vertalingen naar de taal van de modale propositielogica.

Alethische modaliteit. In de filosofische traditie van Aristoteles, Leibniz, Kant en Frege[3], bestaat er een langdurige discussie over de begrippen *mogelijkheid* en *noodzakelijkeid* vanuit een logisch perspectief. Als we het over logische mogelijkheid en logische noodzakelijkheid hebben, dan spreken we ook van *alethische modaliteit.* De formule $\Diamond\varphi$ zou dan betekenen dat φ, puur vanuit de logica gezien, mogelijk waar is, terwijl $\Box\varphi$ zou betekenen dat φ, wederom puur vanuit de logica gezien, noodzakelijk waar is.

[3]Het staat enigszins ter discussie of de laatste van deze grote namen tot deze traditie behoort.

De klassieke discussies in de logische traditie gaan onder andere over de waarheid van principes als

- Als iets het geval is dan is het mogelijk.
- Als iets noodzakelijk is dan is het het geval.
- Als iets noodzakelijk het geval is dan is het noodzakelijk het noodzakelijk geval.
- Iets is noodzakelijk het geval dan en slechts dan als het niet mogelijk is dat datgene niet het geval is.
- Als iets mogelijk het geval is dan is het ook mogelijk dat datgene noodzakelijk het geval is.

De eerste stelling zouden we nu, met behulp van ons nieuwe vocabulaire, kunnen vertalen met de formule $\varphi \to \Diamond\varphi$, waarin φ voor een willekeurige formule staat.

Opgave 38. *Vertaal de resterende stellingen naar de taal van de modale propositielogica. Gebruik hierbij de variabele φ voor een willekeurige formule.*

Het is vaak zo dat we duidelijke intuïties hebben of dit soort modale uitspraken waar zijn of niet. Dit is natuurlijk niet objectief gegeven en verschillen van mening kunnen voorkomen. Deze verschillen van mening zullen waarschijnlijk alleen maar toenemen als de uitspraken ingewikelder worden met meerdere modale operatoren. Vergelijk hiertoe bijvoorbeeld de formule van de constructieboom die we in het voorgaande hebben gezien.

Zoals we in dit hoofdstuk zullen zien, helpt de modale logica bij het beantwoorden van deze vragen. Dit is niet omdat de modale logica helpt te bewijzen wat de 'juiste' noties van 'logische mogelijkheid' en 'logische noodzakelijk' zijn, maar omdat de modale logica ons helpt onze intuïties over deze begrippen voor eenvoudige voorbeelden in kaart te brengen, en dan de consequenties van deze intuïties ook voor complexere gevallen te toetsen. Dat geldt niet alleen voor alethische modaliteit, maar ook voor andere soorten modaliteit.

Opgave 39. *In het voorafgaande hebben we al een aantal noties leren kennen die we met behulp van alethische modaliteit kunnen formuleren. De formule φ is een tautologie als φ, op basis van de wetten van de logica, altijd waar* moet *zijn. Dat φ een tautologie is, kun je dus uitdrukken door te zeggen dat $\Box\varphi$ altijd waar is. Hoe zou je dan op een vergelijkbare manier de volgende stellingen kunnen uitdrukken?*

1. *φ is een contradictie*
2. *φ is een contingentie*
3. *φ* en *ψ zijn contradictoir*
4. *φ* en *ψ zijn contrair*
5. *φ* en *ψ zijn sub-contrair*

Deontische modaliteit. De begrippen 'mogelijkheid' en 'noodzakelijkheid' worden ook gebruikt om te spreken over datgene wat wel of niet is toegestaan gegeven een bepaald system van regels of conventies. De formule $\Diamond p$ zouden we kunnen interpreteren als 'p is mogelijk gegeven een regelsysteem', met andere woorden, als 'p is *toegestaan*'. De formule $\Box p$ zou dan betekenen dat p noodzakelijk is volgens een regelsysteem, wat dan betekent dat p *voorgeschreven* of *verplicht* is. Er zijn heel veel verschillende manieren om deze, zogenoemde *deontische modaliteit* in het Nederlands uit te drukken. De zin "Je moet Wittgenstein in het Duits lezen" bijvoorbeeld, waarin het woord 'noodzakelijk' niet expliciet genoemd wordt, zou toch vertaald kunnen woorden met $\Box p$. Dan staat de modale operator $\Box$ voor de modaliteit die aangeeft wat volgens de regels van het vak *Logica en de Linguistic Turn* mag en moet, en de propositieletter p staat voor de zin staat "je leest Wittgenstein in het Duits".

Opgave 40. *Vertaal de volgende zinnen naar de taal van de (deontische) modale propositielogica. Geef altijd een vertaalsleutel aan. Geef ook aan wat de modale basis is van de modale operator in de vertaling.*

1. *Bellen tijdens de les is niet toegestaan.*
2. *Alcohol drinken en auto rijden is verboden.*
3. *Als je hem lekker vindt, neem gewoon nog een stukje taart!*
4. *Je mag wel een appel, maar geen snoep.*
5. *Als Jan niet meedoet, dan moet Peter of Nicolaas meedoen.*
6. *Als Kees komt, dan mogen Klaas en Jannie niet allebei komen.*

Net als met de alethische modaliteit kunnen we ook abstractere stellingen bekijken, die proberen de eigenschappen van deontische modaliteit in kaart te brengen. De stelling "Als iets verplicht is, dan is het ook toegestaan." zou bijvoorbeeld vertaald kunnen worden als $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$. Hier staat φ weer voor een willekeurige formule. Hoewel we deze stelling wellicht als 'waar' zullen beoordelen, zullen we later zien dat er ook modellen zijn waar deze stelling niet waar in is.

Opgave 41. *Vertaal de volgende zinnen naar de taal van de (deontische) modale propositielogica.*

1. *Als iets verboden is dan is het niet toegestaan.*
2. *Als iets niet is toegestaan dan is het verboden.*
3. *Als iets niet verplicht is dan is het toegestaan.*
4. *Als iets is toegestaan, dan is het niet toegestaan om het niet te doen.*

Epistemische en doxastische modaliteit. De begrippen 'mogelijkheid' en 'noodzakelijkheid' zijn ook toepasbaar wanneer spreken over wat men zelf gelooft of weet, of wat anderen geloven of weten. We hebben het dan over een bepaalde kennisinhoud van bijvoorbeeld een mens, of een computer.

Neem bijvoorbeeld de zin

(4) Ik geloof dat Sinterklaas in het land is.

Zouden we kunnen analyseren als *Gegeven de beschikbare informatie die ik beschikbaar heb, acht ik het mogelijk dat Sinterklaas in het land is.* Dit zouden we vervolgens kunnen vertalen met de formule $\Diamond p$. De formule $\Box p$ zou dan een stelling zijn als *Gegeven de beschikbare informatie is het noodzakelijk dat p.* We spreken hier van *epistemische* of *doxastische* modaliteit. (We zullen later wel op het verschil tussen deze twee begrippen terugkomen.) Zoals ook deontische modaliteit, kan epistemische en doxastische modaliteit op uiteenlopende manier worden uitgedrukt. Bijvoorbeeld zou de zin “Volgens mij is er vandaag geen college” vertaald kunnen worden als $\Box\neg p$. Hier is $\Box$ gekoppelt aan de modaliteit die de informatietoestand van de spreker beschrijft, en p staat voor de zin “vandaag is er college”. De formule $\Box\neg p$ drukt dan uit dat het, gegeven de informatie van de spreker inhoudt dat er vandaag geen college is. Met andere woorden, de spreker gelooft dat er vandaag geen college is.

Opgave 42. *Vertaal de volgende zinnen naar de taal van de (epistemische / doxastische) modale propositielogica. Geef altijd een vertaalsleutel aan. Geef ook aan wat de modale basis is van de modale operator in de vertaling.*

1. *Volgens Jeroen wordt Ajax kampioen als Enschede van Alkmaar verliest.*
2. *Ajax? Kampioen? Ik geloof er niks van!*
3. *Sherlock acht het mogelijk dat Thelma niet vermoord is, en gelooft dat als dat zo is, zij er met Louise vandoor is gegaan.*
4. *Ik ga ervan uit dat Henk morgen zijn excuses gaat aanbieden, als hij weer nuchter is.*

Algemene stellingen zoals “Als je iets gelooft dan vindt je het ook mogelijk” kunnen we opnieuw vertalen met behulp van een variable voor een formule, zoals φ. De stelling “Als je iets gelooft dan vindt je het ook mogelijk” zou dan vertaald kunnen worden met $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ en lijkt wel een intuïtief ware karakterisering van wat het betekent dingen te geloven en mogelijk te vinden.

Opgave 43. *Vertaal de volgende stellingen naar de taal van de (epistemische/deontische) modale propositielogica.*

1. *Als je gelooft dat iets onwaar is dan vind je het niet mogelijk dat het waar is.*
2. *Als je vindt dat iets niet mogelijk is dan geloof je niet dat het waar is.*
3. *Als je vindt dat iets niet mogelijk is dan geloof je dat het niet waar is.*
4. *Als je gelooft dat iets waar is dan geloof je ook dat je dat gelooft.*
5. *Als je gelooft dat iets waar is dan is dat ook waar.*
6. *Als je weet dat iets waar is dan is dat ook waar.*

In dit hoofdstuk hebben we een aantal modaliteiten bekeken. Dit zijn bij verre nog niet alle mogelijke interpretaties van wat ‘mogelijkheid’ en ‘noodzakelijkheid’ kunnen betekenen. Maar het is zeker al voldoende om te demonstreren dat modale logica gemeenschappelijke logische structuren achter een grote aantal uiteenlopende noties probeert te vinden.

Opgave 44. *Voer voor de onderstaande drie zinnen de opgaven (a) en (b) uit:*

1. $(\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi)$
2. $(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$
3. $((\Diamond(p \rightarrow q) \wedge \Diamond p) \rightarrow \Diamond q)$

(a) Vertaal de zinnen in het Nederlands voor alle drie verschillende interpretaties van modaliteit die we tot nu toe hebben bekeken.
(b) Ga na of de principes intuïtief waar of onwaar zijn voor al deze interpretaties.

4.1.3 Valuaties, situaties en mogelijke werelden

We hebben nu een beeld van de verschillende betekenissen die de modale operatoren '$\Box$' en '$\Diamond$' kunnen hebben. In sectie 4.2 zullen we formeel de semantiek van de modale logica introduceren. Belangrijk hierbij zijn de noties *valuatie* en *mogelijke wereld*.

Een valuatie V voor de taal van de propositielogica is een functie van de formules van de propositielogica naar waarheidswaarden:

$$V : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$$

Voor elke formule ϕ legt de valuatie V vast of $V(\phi) = 1$ of $V(\phi) = 0$. Een valuatie kan dus worden gezien als een *volledige beschrijving* van een mogelijke toestand van de wereld, want ze legt de waarheidswaarde van elke mogelijke uitspraak over de wereld vast. We noemen een valuatie om die reden ook wel een *mogelijke wereld*.

We weten dat de waarde $V(\phi)$ geheel en alleen afhangt van de waarde die V toekent aan de propositieletters in ϕ. Vandaar dat we bij het tekenen van een waarheidstafel voor een formule ϕ, beginnen met de propositieletters die in de formule voorkomen, waarmee de rest van de waarheidstafel al vastligt. Bovendien kunnen we alle propositieletters die niet in ϕ voorkomen, buiten beschouwing laten. Om bijvoorbeeld de betekenis van $p \rightarrow q$ te representeren, tekenen we een waarheidstafel met vier rijen, gedefiniëerd door de mogelijke waarheidswaarden van p en q:

	p	q	$(p \rightarrow q)$
V_1 :	1	1	1
V_2 :	1	0	0
V_3 :	0	1	1
V_4 :	0	0	1

Opgave 45. *Beargumenteer dat $V(r)$ irrelevant is voor $V(p \to q)$ als p, q en r verschillende propositieletters zijn.*

Informeel hebben we over de rijen in de waarheidstafel gedacht als valuaties, bijvoorbeeld zou je kunnen zeggen dat de vierde rij in de tabel een valuatie V_3 beschrijft die p de waarheidswaarde 0, en q de waarheidswaarde 1 toekent. Maar hoewel in elk van de rijen in bovenstaande waarheidstafel de waarheidswaarde van $p \to q$ vastligt, liggen de waarheidswaarden van vele andere formules niet vast. Bijvoorbeeld, het is niet duidelijk in welke rijen $p \vee r$ waar is. Dit komt doordat de waarheidswaarde van r niet is vastgelegd in de waarheidstafel, omdat dit voor het onderzoeken van $p \to q$ niet relevant was. Met andere woorden, een rij in een waarheidstafel geeft maar een gedeelte van een valuatie weer, en correspondeert daarom slechts met een *partiële (niet-volledige) beschrijving* van een mogelijke wereld.

Kortom, een valuatie in de propositielogica is een *volledige beschrijving* van een mogelijke toestand van de wereld, en een rij in een waarheidstafel is een *partiële beschrijving* van een mogelijke toestand van de wereld. De valuaties staan voor *mogelijke werelden*, en de rijen in waarheidstafels voor equivalentieklassen van mogelijke werelden, oftewel *mogelijke situaties.* In de propositielogica praatten we vooral over valuaties, of mogelijke werelden, terwijl we vaak werkten, in waarheidstafels, met mogelijke situaties. In de modale logica werken we uitsluitend met mogelijke werelden. Alles wat we zullen zeggen over mogelijkheid en noodzakelijkheid, zal gedefiniëerd zijn in termen van mogelijke werelden.

4.1.4 Logisch-filosofische motivatie van de modale logica

Je kan over de valuatie van die propositionele constanten denken zoals Wittgenstein in de Tractatus dat deed. Ze betreffen atomaire standen van zaken die wel of niet het geval kunnen zijn. Dus we kunnen p als afkorting of vertaling nemen voor *Madeliefjes zijn wit* en q als afkorting of vertaling voor *Paardebloemen zijn geel.* In dat geval zijn p en q allebei mogelijk, en zelfs waar, maar ze hadden allebei ook niet waar kunnen zijn, of de een waar en de ander onwaar. Daarom zijn $(p \wedge q)$, $(p \wedge \neg q)$, $(\neg p \wedge q)$ en $(\neg p \wedge \neg q)$ allemaal logische mogelijkheden. In de waarheidstafels die we hebben geleerd te gebruiken komen inderdaad al deze vier mogelijkheden als logische mogelijkheden naar voren. Elke rij in de waarheidstafel komt overeen met een (logische) mogelijkheid.

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$	$\neg p$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

Op drie punten kan het hier geschetste plaatje bijgesteld worden, en dat gebeurt in de modale logica zoals besproken in dit hoofdstuk.

1. We kunnen valuaties zien als *mogelijke werelden*;
2. De waarheid van een formule kan afhankelijk zijn van *meer dan één* mogelijke wereld;
3. Niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk.

Het vervolg van deze sectie gaat nader in op deze drie punten.

4.1.5 Modale logica en mogelijke werelden

In de propositielogica is de waarheid van een formule bepaald op basis van *één* valuatie, namelijk die valuatie die representeert wat feitelijk het geval is in de *actuele wereld*. In de modale logica kan de waarheid van een formule afhankelijk zijn van *meer dan één* mogelijke wereld; niet alleen de actuele wereld kan bepalend zijn voor de waarheid van een formule, maar ook andere werelden, die andere mogelijke standen van zaken representeren. Bijvoorbeeld, neem een zin zoals

($*$) Jan kwam niet naar het hoorcollege vandaag, maar hij had wel kunnen komen

die vertaald kan worden als $\neg p \wedge \Diamond p$. De waarheid van ($*$) is niet alleen afhankelijk van de actuele wereld, waar Jan daadwerkelijk niet kwam (als de zin waar is), maar ook van een andere alternatieve wereld, namelijk één waar Jan wel kwam. Dat betekent dat ook de valuaties die wij gebruiken om de waarheidswaarden van formules te bepalen in de modale logica niet alleen waarheidswaarden moeten toekennen aan propositieletters in de wereld waarin de formule wordt geïnterpreteerd, maar ook aan de andere mogelijke werelden die misschien relevant zijn voor de betekenis van een formule. Dit vraagt om een nieuwe notie van 'valuatie'. We beginnen met een domein: een verzameling van mogelijke werelden W. De valuatie kent dan voor elke wereld – dus elk element van W – waarheidswaarden toe aan alle propositieletters. Voor iedere wereld w zegt die valuatie V dat $V(w,p) = 1$ als p waar is in w, en $V(w,p) = 0$ als p onwaar is in w.[4] Een valuatie V in de modale logica is dus een functie van paren van werelden en propositionele constanten naar waarheidswaarden:

$$V : W \times \mathsf{PROP} \rightarrow \{0,1\},$$

waar PROP de verzameling propositieletters aanduidt.

In de propositielogica bleven wij ook niet altijd staan bij een concrete valuatie voor een formule, maar keken we naar alle valuaties voor de formule, of alle valuaties die de formule waar maken. Dit speelde bijvoorbeeld een rol wanneer we de begrippen tautologie, contradictie en logische equivalentie hebben gedefiniëerd. Bovendien was dit van belang voor onze definitie van geldigheid. Het grote verschil tussen propositielogica en modale logica is, dat wij in propositielogica dit perspectief alleen innamen als wij van een meta-niveau naar propositielogica keken. In modale wordt dit perspectief op object-niveau geïncorporeerd waardoor

[4] Meestal gebruiken we de afkortingen $V_w(p) = 1$ en $V_w(p) = 0$

we over alternatieve valuaties, i.e., alternatieve werelden, kunnen praten. Dat doen we met behulp van de operatoren $\Diamond$ en $\Box$. Om dan te kunnen zeggen of gegeven een model een formule $\Diamond p$ waar is, moeten wij in het model niet alleen vastleggen in welke werelden de propositieletter p waar is, maar ook, wat de relevante alternatieve mogelijkheden zijn.

We zullen zien dat afhankelijk van de interpretatie van $\Diamond$ en $\Box$ heel verschillende verzamelingen van mogelijke werelden relevant kunnen zijn: werelden in overeenstemming met een bepaalde verzameling van wetten (deontische modaliteit), of mogelijkheden die een persoon onderscheidt op basis van wat hij/zij weet (epistemische modaliteit). We noemen de werelden relevant voor de evaluatie van een modale formule de *modale basis van de operatoren* $\Diamond$ *of* $\Box$.

Als we het in de context van propositielogica over verschillende valuaties, i.e. verschillende mogelijke werelden hadden, dan hadden wij het altijd over alle logisch mogelijke werelden. Dus wij werkten in propositielogica met een *alethische* blik op wat mogelijk is. Maar er zijn belangrijke verschillen. In de propositielogica keken wij naar andere mogelijke standen van zaken om de *betekenis* van formules te kunnen definiëren of de *geldigheid* van argumenten te kunnen bepalen, daarom was het belangrijk om *alle logische mogelijkheden* in een waarheidstafel te representeren.

Wat mogelijk is of niet, dus wat de modale basis is van $\Diamond$ of $\Box$, hangt ook af van de actuele wereld waarin een formule met deze operatoren wordt geïnterpreteerd. Als iemand zegt dat het mogelijk is dat A, of dat het toegestaan is dat A, dan kunnen we ons ook voorstellen dat er omstandigheden zijn waarin het niet mogelijk is dat A, of waarin het niet is toegestaan dat A. In een wereld waarin de NZ-lijn niet werd gebouwd, kon je met je auto van het Weteringcircuit naar de RAI door de Ferdinand Bol. In een wereld waar in Amsterdam drugs niet gedoogd worden, kan of mag je niet een joint opsteken. Als we mogelijke werelden dus serieus nemen, dan moeten we het idee ook serieus nemen dat in sommige werelden sommige dingen niet mogelijk of toegestaan zijn, en in andere werelden wel. Wat mogelijk is hier, is mogelijk niet mogelijk daar. Elke wereld in een model voor modale logica bepaalt dus zelf wat mogelijk is of niet. Dit wordt in de definitie van het model opgevangen door de binaire relatie R, die voor elke wereld bepaalt welke werelden vanuit deze wereld toegankelijk zijn – en dus als mogelijk worden waargenomen – en welke niet.
Samenvattend, in de propositielogica wordt de waarheid van formules bepaald op basis van één valuatie (de actuele wereld) en hun betekenis en logische geldigheid op basis van alle logische mogelijkheden. In modale logica, daarentegen,

- kan de waarheid van formules afhankelijk zijn van meerdere mogelijke werelden;
- niet alles wat logisch mogelijk is is ook daadwerkelijk mogelijk.

In de volgende sectie worden de bovenstaande intuïties precies gedefiniëerd. Afsluitend, om een idee te krijgen van een 'mogelijke wereld', is het volgende citaat van David Lewis wellicht inspirerend:

> I believe, and so do you, that things could have been different in countless ways. (...) Ordinary language permits the paraphrase: there are many ways things could have been besides the way they actually are. (...) It says that there exist many entities of a certain description, to wit 'ways things could have been'. (...) I believe permissible paraphrases of what I believe; (...) I therefore believe in the existence of entities that might be called 'ways things could have been'. I prefer to call them 'possible worlds'.
>
> David Lewis, 1979, "Possible Worlds", in: Michael J. Loux (ed.), *The Possible and the Actual*, Cornell University Press, Ithaca, p. 182.

4.2 Semantiek van de modale propositielogica

4.2.1 Kripke-modellen

Saul Kripke heeft de inzichten van voorgaande secties een formele en logische formulering gegeven in de vorm van wat algemeen bekend staat als *Kripke-modellen*. Een Kripke-model gaat uit van een mogelijke wereld w, die gezien wordt als de actuele wereld - de wereld die daadwerkelijk het geval is. Dit is de wereld waarin wij de waarheid of onwaarheid van formules toetsen. Bijvoorbeeld kunnen wij ons afvragen of zin $(*)$ waar is in w. In dit geval moeten we kijken naar de feiten van wereld w, *i.e.*, of het feitelijk zo is dat je op 5 december cadeautjes krijgt. Stel nou dat het feitelijk zo is dat je op 5 december cadeautjes krijgt, dat wil zeggen dat zin $(*)$ waar is in w. Dan is dat natuurlijk niet de enige mogelijkheid die er is. Het kan net zo goed zijn dat je geen cadeautjes krijgt. Dus er is ook een andere wereld v waarin de zin $(*)$ onwaar is. In ons voorbeeld is dit echter niet de actuele wereld.

$(*)$ Op 5 december krijg je veel cadeautjes.

Al de mogelijkheden die wij onderscheiden worden samengevat in W, de verzameling mogelijke werelden. W is vergelijkbaar met het domein D in predicatenlogica. De valuatie V van een Kripke model bepaalt dan voor alle mogelijke werelden $w \in W$ wat de feiten zijn in w, dus V kent voor elke wereld w aan alle propositieletters een waarheidswaarde toe.

Nu is het zo dat niet alle mogelijke werelden toegankelijk zijn vanuit alle werelden. We hebben in sectie 4.1 gezien dat dat wat mogelijk is afhangt van de wereld waarin wij ons bevinden. De mogelijkheden, bezien vanuit een wereld w, worden gegeven door een *toegankelijkheidsrelatie* R zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$ desda v een mogelijkheid is in w. Beschouw nogmaals het bovengenoemde voorbeeld. Stel dat w de actuele wereld is, waarin je inderdaad pakjes krijgt van de goedheiligman, en dat v een mogelijke wereld is die in alles op de actuele wereld lijkt, behalve dat je niets krijgt. Stel nu dat je niet zeker weet of je cadeautjes krijgt of niet. De relatie R staat nu voor 'je houdt het voor mogelijk dat'. De mogelijke wereld v is dan toegangelijk vanuit w, $\langle w, v\rangle \in R$, want je acht het mogelijk dat je niets krijgt. Maar ook w is toegankelijk vanuit w, $\langle w, w\rangle \in R$, want je acht het ook mogelijk dat je wel wat krijgt. Een Kripke-model vertelt ons wat er aan de hand is in de werelden in W: niet alleen welke atomaire formules (propositieletters) er waar en onwaar zijn, maar ook welke werelden mogelijk zijn in welke werelden, zoals beschreven met de toegankelijkheidsrelatie.

Definitie 4.2.1 (Kripke-model)**.** Een Kripke model $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$ is een viertal waarbij:

1. $W \neq \varnothing$ is een verzameling mogelijke werelden.
2. $R \subseteq W \times W$ is een relatie op W, die zegt welke werelden toegankelijk zijn vanuit welke wereld.
3. V is een valuatiefunctie zodanig dat voor elke wereld v, V_v bepaalt de waarde van alle propositieletters in v:

   $$V : W \times \mathsf{PROP} \to \{0, 1\}$$

   We zullen in plaats van $V(w, p)$ in het vervolg $V_w(p)$ schrijven.
4. w is een van de elementen van W en stelt de 'actuele wereld' voor.

We geven in wat volgt een korte samenvatting:

ad 1. De verzameling W is een niet-lege verzameling objecten die we zullen interpreteren als de verzameling mogelijke werelden (dat hoeven niet alle logische mogelijkheden te zijn).

ad 2. De binaire relatie R geeft aan, voor een gekozen modaliteit, welke werelden v in dat model toegankelijk zijn vanuit wereld w. Dit is het geval desda Rwv, oftewel, desda $\langle w, v\rangle \in R$.

ad 3. V is een valuatie van de propositieletters zoals in de propositielogica, maar dan afhankelijk van een wereld $w \in W$. We zullen $V_w(p) = 1$ verstaan als 'p is waar in wereld w'. We zullen $V_w(p) = 0$ verstaan als 'p is onwaar in wereld w'.

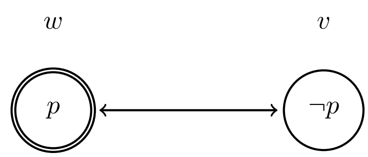
ad 4. In een Kripke-model speelt w de rol van de 'actuele wereld', *i.e.*, we nemen aan dat deze wereld weergeeft wat de werkelijke stand van zaken is. Dit betekent dat V_w ons in die zogenaamd actuele wereld vertelt welke propositieletters waar zijn en welke niet - V_w gedraagt zich als een valuatiefunctie in de propositielogica.

4.2.2 Kripke-modellen tekenen

Beschouw het volgende Kripke-model $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$ met

- $W = \{w, v\}$,
- $R = \{\langle w, v\rangle, \langle v, w\rangle\}$, en
- $V_w(p) = 1$ en $V_v(p) = 0$.

Het Kripke model $\mathcal{K}$ is getekend in figuur 4.2. We kunnen elk eindig Kripke-model weergeven door de werelden te tekenen als cirkels. De werelden zijn verbonden met pijlen, welke de toegankelijkheidsrelatie R uitbeelden. In elke cirkel schrijven we welke proposities waar zijn volgens de valuatiefunctie. Bij iedere wereld geven we de naam van de wereld aan. De actuele wereld zullen we aangeven met een dubbele cirkel. In figuur 4.2 kunnen we bijvoorbeeld zien dat de linker wereld, de actuele wereld w voorstelt. We zien dat in deze wereld p waar is, in overeenstemming met de valuatiefunctie die we in het bovenstaande hebben gedefiniëeerd. In de rechter wereld, wereld v, is p onwaar.



Figuur 4.2

Hoewel p waar is in de actuele wereld w, is het in de actuele wereld *mogelijk* dat p niet waar is (de wereld v, met $V_v(p) = 0$ is namelijk toegankelijk vanuit w), en is het 'mogelijk dat het mogelijk is dat p' wel waar is, want vanuit v gaat er weer een pijl terug naar w. Om iets meer bekendheid te krijgen met Kripke modellen, voordat we de semantiek definiëren, bekijken we een iets groter model. Zij $P = \{p, q\}$ een verzameling propositieletters en $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$ een Kripke model met

- $W = \{w, w_1, w_2, w_3\}$,
- de valuatiefunctie V gedefiniëerd als volgt

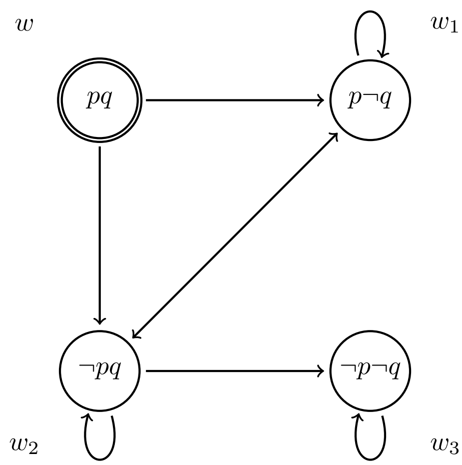
$$\begin{array}{llll} V_w(p) = 1, & V_{w_1}(p) = 1, & V_{w_2}(p) = 0, & V_{w_3}(p) = 0, \\ V_w(q) = 1, & V_{w_1}(q) = 0, & V_{w_2}(q) = 1, & V_{w_3}(q) = 0, \end{array}$$

- en de toegankelijkheidsrelatie R gedefiniëerd als volgt

$$\begin{aligned} R = \{&\langle w, w_1\rangle, \langle w, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \\ &\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_3\rangle, \langle w_3, w_3\rangle\}\,. \end{aligned}$$

Het model $\mathcal{K}$ is afgebeeld in Figuur 4.3. In dit figuur zien we dat de actuele wereld, wereld w, linksboven is afgebeeld. De functie V_w in het bovenstaande vertelt ons dat in w, p en q beide waar zijn, zoals is af te lezen van de propositieletters in de cirkel. Wat we ook kunnen zien in dit figuur is dat in w er pijlen gaan naar de werelden w_2 en w_1. Let op dat in deze werelden, andere proposities waar zijn volgens de valuatiefunctie V, dan in de actuele wereld. Zo maakt V bijvoorbeeld de propositie p onwaar in w_2 en hetzelfde gebeurt voor de propositie q in w_1. We kunnen dus bijvoorbeeld zeggen dat in de actuele wereld

$\neg p$ *mogelijk* is, i.e., $\Diamond\neg p$, omdat er vanuit die wereld w een pijl gaat naar een wereld (w_2) waar p onwaar is. Er zijn natuurlijk nog veel meer formules waar in dit model. Wat nu duidelijk moet zijn is dat de valuatiefunctie V voor iedere wereld in het domein W bepaalt welke proposities waar zijn. Maar door de relaties die bestaan tussen de werelden kunnen we ook in "andere werelden kijken" en zien wat dáár waar (en onwaar) is. Dit gegeven zullen we exact maken in de definitie van de semantiek van de modale propositielogica.



Figuur 4.3: Een groter Kripke model

Opgave 46. *Zij p en q propositieletters. Beschouw het Kripke model $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$, met $W = \{w, w_1, w_2\}$. V is gedefiniëerd als:*

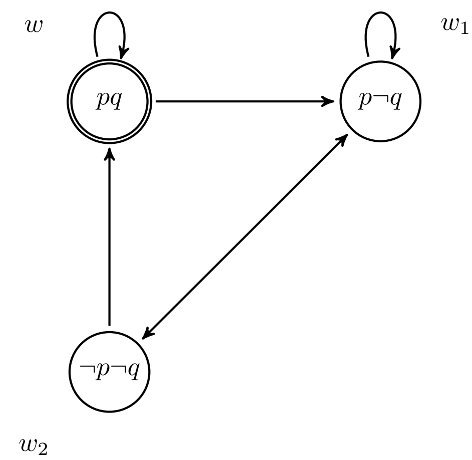
$$V_w(p) = 1, \qquad V_{w_1}(p) = 1, \qquad V_{w_2}(p) = 0,$$
$$V_w(q) = 1, \qquad V_{w_1}(q) = 0, \qquad V_{w_2}(q) = 1$$

en R is gegeven als:

$$R = \{\langle w, w\rangle, \langle w, w_1\rangle, \langle w, w_2\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle\}.$$

Teken dit Kripke model op dezelfde wijze als in figuur 4.2 en figuur 4.3.

Opgave 47. *Geef de volledige definitie van het Kripke model $\mathcal{K}$ dat in figuur 4.4 afgebeeld staat.*



Figuur 4.4

In sectie 4.3 zullen we de notie van een Kripke-model op verschillende punten algemener maken. Soms praten we over een model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ zonder aan te geven wat nou de actuele wereld w in dat model is; soms praten we over een *frame* $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, dus zonder aan te geven welke propositieletters in welke wereld waar of onwaar zijn. In dat laatste geval kunnen we eigenlijk alleen redeneren over de toegankelijkheidsrelatie R. We zullen dan zien dat precies deze redeneerpatronen relevant zijn om onze intuïties uit te drukken over modale operatoren als $\Diamond$ en $\Box$.

4.2.3 Semantiek

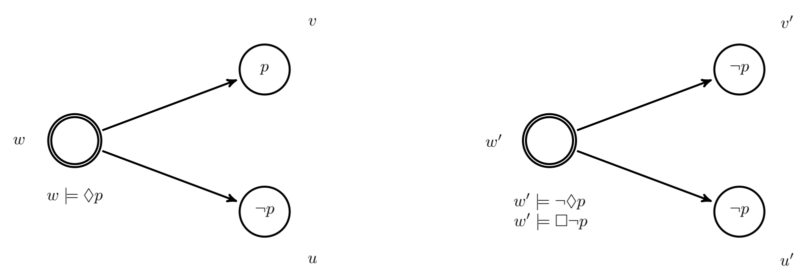
In deze sectie zullen we definiëren wanneer een formule $\phi \in ML$ waar is gegeven een Kripke model $\mathcal{K}$. Voor formules $\phi \in ML$ gebruiken we de notatie $\mathcal{K} \models \phi$ om aan te geven dat ϕ waar is in het model $\mathcal{K}$, waarbij $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$. We schrijven $\mathcal{K} \not\models \phi$ om aan te geven dat ϕ onwaar is in $\mathcal{K}$.

Definitie 4.2.2 (Semantiek van de modale propositielogica)**.** Zij $\phi \in ML$. Zij $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$ een Kripke model. We definiëren recursief wanneer een formule

ϕ waar is in $\mathcal{K}$ in wereld w.

$$\langle W, R, V, w \rangle \models p \text{ desda } V_w(p) = 1$$
$$\langle W, R, V, w \rangle \models \neg\phi \text{ desda } \langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi$$
$$\langle W, R, V, w \rangle \models \phi \wedge \psi \text{ desda } \langle W, R, V, w \rangle \models \phi \text{ en } \langle W, R, V, w \rangle \models \psi$$
$$\langle W, R, V, w \rangle \models \phi \vee \psi \text{ desda } \langle W, R, V, w \rangle \models \phi \text{ of } \langle W, R, V, w \rangle \models \psi$$
$$\langle W, R, V, w \rangle \models \phi \to \psi \text{ desda } \langle W, R, V, w \rangle \not\models \phi \text{ of } \langle W, R, V, w \rangle \models \psi$$
$$\langle W, R, V, w \rangle \models \Diamond\phi \text{ desda er is een } v \in W \text{ z.d.d. } Rwv \text{ en } \langle W, R, V, v \rangle \models \phi$$
$$\langle W, R, V, w \rangle \models \Box\phi \text{ desda voor elke } v \in W \text{ z.d.d. } Rwv : \langle W, R, V, v \rangle \models \phi.$$

We zien hier twee veranderingen als we dit systeem vergelijken met de propositielogica. In de eerste plaats hangt de waarheidswaarde van een formule, om te beginnen die van een propositieletter, af van de uitgekozen wereld w in een model $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w \rangle$. Dus als de valuatiefunctie V zegt dat een propositieletter p waar is in w, dwz $V_w(p) = 1$, dan telt die propositie p als waar in w (in het gegeven model $\mathcal{K}$). De interessante dingen gebeuren, in de tweede plaats, als we naar modale formules gaan kijken. De waarheidswaarde van een formule $\Diamond\phi$ (*Het is mogelijk dat* ϕ) hangt af van de wereld van evaluatie w, maar ook van wat er in die wereld mogelijk is volgens de toegankelijkheidsrelatie R. Als er vanuit w een toegankelijke (mogelijke) wereld v is, dus als Rwv, en als het in die wereld v zo is dat ϕ waar is, dan is $\Diamond\phi$ in de oorspronkelijke wereld w waar. Deze definitie formuleert precies het idee dat die wereld w de mogelijkheid ziet dat ϕ waar is.



Figuur 4.5

Als we bijvoorbeeld kijken naar de twee modellen in figuur 4.5, dan zien we dat in het linker model in wereld w de formule $\Diamond p$ waar is, omdat in tenminste één van de werelden die toegankelijk zijn vanuit w, p waar is. In het rechter model is de formule $\Diamond p$ *niet* waar, omdat in geen van de werelden die toegankelijk zijn van w, p waar is. Wat precies om deze reden in het rechter model in wereld w' echter wel waar is, is de formule $\Box\neg p$. Een formule $\Box\phi$ zegt namelijk iets sterkers dan een formule $\Diamond\phi$. Zo'n formule is waar in een wereld w als ϕ waar is in *alle* werelden toegankelijk vanuit w. Als in w geen wereld mogelijk oftewel toegankelijk is waarin ϕ niet waar is, dan is ϕ kennelijk noodzakelijk.

Omgekeerd, als er een wereld toegankelijk is vanuit w waarin ϕ niet waar is, dan is $\Box\phi$ (*Het is noodzakelijke dat* ϕ) niet waar. Aangezien in het rechtermodel $\neg p$ waar is in *alle* mogelijke werelden (vanuit w) mogen we dus concluderen dat $\Box\neg p$ waar is in w'. Tenslotte merken we op dat, als een wereld w niet reflexief is, *i.e.*, er gaat geen pijl van w naar zichzelf, dan is het niet van belang om te weten welke proposities waar zijn in w om in die wereld een modale formule te evalueren.

Om de semantiek nog wat beter te illustreren beschouwen we het eerder gedefiniëerde Kripke model $\mathcal{K}$, afgebeeld in figuur 4.3. De zin p is waar in dit model, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \models p$, want $V_w(p) = 1$. Verder kunnen we vaststellen dat het *mogelijk* is dat $\neg q$ niet waar is. Als we namelijk kijken naar wereld w_1 dan zien we dat daar q onwaar is, oftewel $V_{w_1}(q) = 0$. Omdat w_1 toegankelijk is vanuit w, *i.e.*, $\langle w, w_1\rangle \in R$, is er dus ten minste één wereld toegankelijk vanuit w waar q onwaar is, dit betekent, volgens de één na laatste clausule van definitie 4.2.2, dus dat $\Diamond\neg q$ waar is in w, oftewel, $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\neg q$.

We hebben kunnen zien in deel 4.1.1 van dit hoofdstuk, in het bijzonder in definitie 4.1.1 van de taal *ML*, dat we ook formules kunnen vormen met meer dan één modale operator. Onze semantiek moet natuurlijk ook voorzien in deze formules. Als we nogmaals kijken naar figuur 4.3 dan zien we dat $\Diamond\Diamond p$ eveneens waar is, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\Diamond p$. Dat is als volgt in te zien. $\langle w_1, w_1\rangle \in R$ en $V_{w_1}(p) = 1$. Dit betekent dus dat $\langle W, R, V, w_1\rangle \models \Diamond p$. We hebben in het bovenstaande al gezien dat $\langle w, w_1\rangle \in R$. Omdat in w_1 $\Diamond p$ waar is, betekent dat dat in wereld w de formule $\Diamond\Diamond p$ waar is, oftewel $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\Diamond p$.[5]

We zullen nu kijken naar een formule met verschillende modale operatoren waaronder een $\Box$. We claimen dat in het Kripke model afgebeeld in figuur 4.3 de formule $\Diamond\Box\neg p$ waar is, dat wil zeggen $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\Box\neg p$. Deze formule zegt intuïtief dat we in één stap naar een wereld kunnen gaan waar in alle werelden, toegankelijk vanuit die wereld, p onwaar is.[6] Die wereld lijkt er te zijn en dat is w_2. De werelden die toegankelijk zijn vanuit w_2 zijn:

- w_2 zelf: $\langle w_2, w_2\rangle \in R$, en,
- w_3: $\langle w_2, w_3\rangle \in R$.

We kunnen aflezen van de definitie van V dat

- $V_{w_2}(p) = 0$, en,
- $V_{w_3}(p) = 0$.

Dit betekent dus volgens de laatste clausule van definitie 4.2.2 dat in wereld w_2 de formule $\Box\neg p$ waar is, *i.e.*, $\langle W, R, V, w_2\rangle \models \Box\neg p$. Omdat nu $\langle w, w_2\rangle \in R$ kunnen we vaststellen dat $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\Box\neg p$.

[5] De opmerkzame lezer heeft gezien dat we dit argument kunnen (blijven) herhalen en dat dus ook $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\Diamond\Diamond p$ en $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p$, *etc.* (Dit geldt echter niet in alle modellen.)

[6] Het valt op dat naarmate de formules complexer worden het moeilijker wordt de betekenis in natuurlijke taal om te zetten.

Opgave 48. *Ga nu na, voor het eerder beschouwde model $\mathcal{K}$ met vier werelden, afgebeeld in Figuur 4.3, of de volgende formules waar zijn in $\mathcal{K}$:*

(i)	p	*(v)*	$\Diamond\Box q$
(ii)	$\Box p$	*(vi)*	$\Diamond\Diamond q \wedge \Diamond\Diamond\neg q$
(iii)	$\Diamond q$	*(vii)*	$\Diamond(\Diamond q \wedge \Diamond\neg q)$
(iv)	$\Box q$	*(viii)*	$\Diamond(\Diamond q \wedge \neg\Diamond q)$

Opgave 49. *Ga na voor het eerder beschouwde model $\mathcal{K}$ met drie werelden afgebeeld in Figuur 4.4 of de volgende formules waar zijn in $\mathcal{K}$:*

(i)	$\Box p$	*(v)*	$\Box(q \to p)$
(ii)	$\Box\neg q$	*(vi)*	$\neg p \to \Diamond p$
(iii)	$\Diamond\Diamond q$	*(vii)*	$q \to \Diamond\Box\neg q$
(iv)	$\Box(p \to q)$	*(viii)*	$\Box(p \leftrightarrow \Diamond p)$

Tot nu toe hebben we gekeken of, gegeven een Kripke model $\mathcal{K}$, een formule waar (of onwaar) is. Dit kan natuurlijk ook andersom. Stel de formule $\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$ is gegeven. Hoe ziet een Kripke model eruit dat deze formule waar maakt? Hier zijn natuurlijk meerdere mogelijkheden. In dit geval zouden we bijvoorbeeld voor $P = \{p\}$ het volgende Kripke model $\mathcal{K}$ kunnen definiëren waar

- $W = \{w, v\}$,
- $R = \{\langle w, w\rangle, \langle w, v\rangle\}$,
- $V_w(p) = 0$, $V_v(p) = 1$.

We moeten laten zien dat dit Kripke model de formule $\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond p \wedge \Diamond\neg p$. Dit betekent dat we twee dingen moeten laten zien:

(1) $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond p$, en,

(2) $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\neg p$.

We kunnen zien dat (1) waar is omdat er vanuit w een wereld toegankelijk is, w zelf, waar p waar is: $\langle w, w\rangle \in R$ en $V_w(p) = 1$. Hieruit mogen we concluderen dat $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond p$. Tegelijkertijd is het zo dat er een wereld toegankelijk is uit w, nl. de wereld v, waar p onwaar is: $\langle w, v\rangle \in R$ en $V_v(p) = 0$. Hieruit mogen we concluderen dat $\langle W, R, V, w\rangle \models \Diamond\neg p$.

Opgave 50.

(1) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Diamond p \wedge \Box p$ waar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule waar maakt.

(2) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Diamond\Box p \wedge \Diamond\neg\Box p$ waar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule waar maakt.

(3) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Diamond\Box p \to p$ waar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule waar maakt.

(4) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $p \wedge \Box q \wedge \neg\Diamond p \wedge \Diamond q$ waar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule waar maakt.

(5) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Box p \wedge \neg\Diamond p$ waar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule waar maakt.

Opgave 51.

(1) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Box\Diamond p$ onwaar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule onwaar maakt.

(2) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Diamond p \vee \Box p$ onwaar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule onwaar maakt.

(3) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $p \to \Diamond p$ onwaar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule onwaar maakt.

(4) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Box p \to \Box\Box p$ onwaar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule onwaar maakt.

(5) Definiëer een Kripke model $\mathcal{K}$ waarin $\Diamond\Diamond p \to p$ onwaar is. Leg uit waarom het door u gegeven Kripke model de formule onwaar maakt.

Opgave 52.

(1) Toon aan dat $(\neg\Box\phi \to \Diamond\neg\phi)$ waar is in alle Kripke modellen;

(2) Toon aan dat $(\neg\Diamond\phi \to \neg\phi)$ niet waar is in alle Kripke modellen. (Dwz., geef een tegenmodel waarin $\Diamond\phi$ onwaar is in w and ϕ waar.)

4.3 Geldigheid en frames

Gegeven een interpretatie van de modale operatoren kunnen we formules van de modale logica opvatten als geldige *principes*. Dit zijn zinnen van de modale logica die schematisch opgezet en gegeven een interpretatie van de modale operatoren waar zijn omdat ze overeenstemmen met de intuïties die we hebben van de begrippen die de modale operatoren uitdrukken. Als we $\Diamond$ en $\Box$ interpreteren als *het is mogelijk dat* en *het is noodzakelijk dat*, respectievelijk, kunnen we de volgende zinnen formuleren en ons afvragen of ze altijd waar zijn onafhankelijk van wat p precies zegt:

(1) $p \to \Diamond p$

(2) $\Box p \to \Box\Box p$

(3) $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

(4) $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Wellicht is de vraag of zin (1) een principe is, i.e., altijd waar is, niet heel problematisch. Als p het geval is dan moet p dus mogelijk zijn. Maar onze intuïties laten ons al gauw in de steek als de formules complexer worden. Wat namelijk te denken van (2), (3) en (4)?

De vraag naar de waarheid van dit soort principes zijn klassiek filosofische vragen, maar met behulp van de modale logica kunnen we die vragen scherper formuleren. De modale logica helpt ons om de intuïties achter die vragen en hun mogelijke antwoorden beter te begrijpen. Dat kan omdat de modale logica de betekenis van woorden zoals *mogelijk* en *noodzakelijk* precies maakt.

In sectie 4.4 zullen we andere interpretaties van de modale operatoren nader bekijken en zullen we zien dat de principes die we kunnen formuleren niet voor alle interpretaties waar zijn. Als we bijvoorbeeld $\Box p$ interpreteren als 'ik geloof dat p' kunnen we ons afvragen of het altijd klopt dat als p het geval is dat ik dat dat dan ook geloof. Of, als ik geloof dat p het geval is, dat ik dan ook geloof dat ik dit geloof (ik geloof dat ik geloof dat p het geval is, *i.e.*, $\Box p \to \Box\Box p$). Dit is een vraag over hoe transparant onze eigen overtuigingen voor ons zijn, een vraag die te maken heeft met de principes van denken en kennis.

Als wij ons afvragen of dit principe een goede beschrijving geeft van hoe *geloven* werkt (of zou moeten werken), dan zijn wij niet geïnteresseerd in de vraag of de zin $\Box p \to \Box\Box p$ waar is in een gegeven Kripke model. Maar wij zijn geïnteresseerd in de vraag of het principe geldt onafhankelijk van wat de actuele wereld is (dus onafhankelijk van de keuze van w), en ook onafhankelijk van wat de feiten zijn in de verschillende werelden van het model. Wij zijn slechts geïnteresseerd in de vraag hoe *geloven* werkt, *i.e.*, wij zijn geïnteresseerd in de eigenschappen van de relatie R als deze *doxastisch* wordt geïnterpreteerd. Hoe moet R in elkaar zitten zodanig dat de zin $\Box p \to \Box\Box p$ waar is onafhankelijk van welk punt in een model wij kiezen en ook onafhankelijk van hoe de letter p in dit model wordt geïnterpreteerd, *i.e.*, of p waar is of niet in een wereld?

Dit soort vragen motiveert de introductie van een nieuwe notie in de modale logica: de notie van *geldigheid* van een formule. Wij kennen het begrip geldigheid al van de propositie- en de predikatenlogica, namelijk als een eigenschap van redeneringen. Maar we kunnen het ook hebben over de geldigheid van formules of zinnen. We vatten een zin dan op als de conclusie van een redenering zonder premissen. Een dergelijke redenering zonder premissen is geldig als de conclusie altijd waar is. In dit geval zeggen we ook dat die formule (de conclusie dus) geldig is. We zijn deze notie al eerder tegengekomen bij propositie- en predikatenlogica (*tautologie*) en bij termenlogica (*logische wetten*).
In de modale logica worden verschillende noties van geldigheid onderscheiden:

(1) Geldig in een model,

(2) Geldig op een frame, en,

(3) Logisch geldig.

Elk van deze noties wordt hieronder nader uitgelegd.

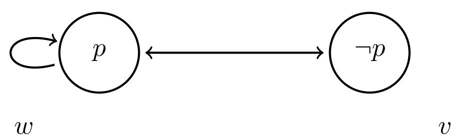
4.3.1 Geldigheid in een model

De eerste stap in abstractie die wij nemen bestaat eruit af te zien van de specifieke wereld waarin een formule wordt geëvalueerd. Wij zeggen dat een formule geldig is in een model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ als de formule waar is in *alle* werelden van dit model.

Definitie 4.3.1 (Geldigheid in een model)**.** Een formule ϕ is geldig in een model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ desda $\langle W, R, V, w\rangle \models \phi$ voor alle werelden $w \in W$. We schrijven dit als $\mathcal{M} \models \phi$ of $\langle W, R, V\rangle \models \phi$.

De notie van *geldigheid in een model* abstraheert dus van de wereld w waarvanuit wij het model bekijken. Beschouw bijvoorbeeld het model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ gegeven in afbeelding 4.6. In dit geval is de formule $\Box p$ niet waar in wereld w, maar wel waar in wereld v. De formule $\Box p$ is dan niet geldig in $\mathcal{M}$, *i.e.*, $\mathcal{M} \not\models \Box p$, want er is een wereld, w, zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models p$. De formule $\Diamond p$ is daarentegen wel geldig in $\mathcal{M}$, want deze formule is waar in elke wereld van het model.

We merken het volgende op: bewijzen dat een formule φ geldig is in een model houdt dus in dat je moet aantonen voor iedere wereld w in dat model dat φ waar is in w. Om te bewijzen dat een formule φ niet geldig is in een model volstaat het om aan te tonen voor ten minste één wereld w in dat model dat φ daar niet waar is. Vergelijkbare bewijsstrategieën zijn we tegengekomen in predikatenlogica bij de bespreking van universele kwantoren.



Figuur 4.6

Opgave 53.

(1) Beschouw het model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ met

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$,
- $V_{w_1}(p) = 1, V_{w_1}(q) = 0, V_{w_2}(p) = 0, V_{w_2}(q) = 0, V_{w_3}(p) = 1, V_{w_3}(q) = 0$*, en,*
- $R = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_3\rangle\}$.

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn in $\mathcal{M}$. Geef dus voor elke formule een wereld $w \in W$ aan van $\mathcal{M}$ en leid af dat de formule onwaar is in deze w.

(i) $\neg p \wedge \neg q$
(ii) $\Box(\neg p \wedge \neg q)$
(iii) $\Diamond(\neg p \wedge \neg q)$
(iv) $\Diamond q \vee \Box\neg p$
(v) $\Diamond\neg q$

(2) Beschouw het model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ met

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$,

- $V_{w_1}(p) = 0, V_{w_1}(q) = 1, V_{w_2}(p) = 1, V_{w_2}(q) = 1, V_{w_3}(p) = 1, V_{w_3}(q) = 1$, *en,*
- $R = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}$.

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn op $\mathcal{M}$:

(i) $q \to p$

(ii) $\neg p \to \Box\neg p$

(iii) $\Box p \to \Diamond q$

(iv) $\Box(q \to \Diamond p)$

(v) $\Box p \to \Diamond p$

> **Onthoud:** Om te laten zien dat een formule ϕ niet geldig is in een model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ moet een wereld $w \in W$ worden gegeven waarvoor de formule onwaar is, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \phi$.

Voor het soort vragen waarmee wij deze sectie zijn begonnen is deze notie van geldigheid nog niet voldoende. Ze abstraheert weliswaar van het perspectief van de mogelijke werelden in het model, maar nog niet van de (willekeurige) feiten, *i.e.*, niet van de valuatie van de propositieletters. Of een formule geldig is in een model hangt nog steeds af van de gekozen propositieletters en hoe deze worden geïnterpreteerd. Het zegt dus nog niets over de relatie R in termen waarvan *noodzakelijk* en *mogelijk* zijn gedefiniëerd.

Stel, wij vatten het model in afbeelding 4.6 op als een representatie van de geloofstoestand van Piet. Piet gelooft dus in v dat p het geval is, maar acht het in w ook mogelijk dat p onwaar is. In dit model is het eerder besproken principe $\Box p \to \Box\Box p$ niet geldig. In wereld v gelooft Piet wel p ($\langle W, R, V, v\rangle \models \Box p$), maar hij gelooft niet dat hij dit gelooft ($\langle W, R, V, v\rangle \not\models \Box\Box p$).

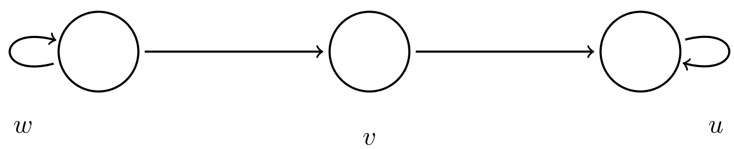
4.3.2 Geldigheid op een frame

De volgende stap in abstractie die wij ondernemen bestaat eruit af te zien van een specifieke valuatie voor de propositieletters. Het enige dat dan overblijft is de verzameling van mogelijke werelden W en de relatie R tussen deze werelden. Een structuur $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ bestaand uit een verzameling W en een binaire relatie R over W noemen wij een *frame*. Een frame is dus een model zonder valuatie functie. Gegeven een frame $\mathcal{F}$ zullen we zeggen dat een model $\mathcal{M}$ *gebaseerd is op* $\mathcal{F}$ als V een valuatie functie is en $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$.

We zeggen dat een formule ϕ geldig is op een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ als die formule geldig is in alle modellen die gebaseerd zijn op dat frame. Hiermee bedoelen we dat die formule een logische structuur heeft zodanig dat die waar is onafhankelijk van de valuatie van de propositieletters. We kunnen concluderen dat een formule ϕ geldig is op een frame vanwege de eigenschappen van de toegangelijkheidsrelatie R van een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$. Logisch-filosofische discussies blijken te gaan om eigenschappen van zulke frames.

Definitie 4.3.2 (Geldigheid op een frame)**.** Een formule ϕ is geldig op een frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ desda voor alle valuaties V geldt dat $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \models \phi$. We schrijven dit als $\mathcal{F} \models \phi$.

Geldigheid op een frame abstraheert dus niet alleen van de wereld w vanuit welke wij het model bekijken, maar ook van de valuatie V. Beschouw bijvoorbeeld het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ gegeven in afbeelding 4.7. In tegenstelling tot afbeelding 4.6 is dus niet meer gegeven of de propositieletters in de werelden van het frame waar of onwaar zijn.



Figuur 4.7

Stel, bijvoorbeeld, wij willen weten of de formule $\Box p \to p$ geldig is op het frame gegeven in afbeelding 4.7. Dan zou de formule dus waar moeten zijn in elke wereld van het frame, voor elke valuatie. Het is makkelijk een valuatie V te geven zodanig dat de formule $\Box p \to p$ geldig is in het model $\langle W, R, V \rangle$ waarbij W en R gedefiniëerd zijn zoals in afbeelding 4.7. Neem bijvoorbeeld een valuatie zodanig dat $V_z(p) = 1$ voor alle $z \in W$. Maar om geldig te zijn op het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ is meer nodig; de formule $\Box p \to p$ moet geldig zijn onder *elke* valuatie. En dit blijkt niet het geval te zijn. We kunnen namelijk een valuatie V' definiëren waarvoor de formule niet waar is in alle punten van het model. Dit kan, bijvoorbeeld, met de valuatie V' zodanig dat $V'_w(p) = 1, V'_v(p) = 0$, en $V'_u(p) = 1$. Onder deze valuatie V' vinden we dat $\langle W, R, V', v \rangle \not\models \Box p \to p$. Immers $\Box p$ is waar in v onder deze valuatie, en p niet. Dus $\Box p \to p$ is niet waar in v onder V'. Dit betekent dat we een wereld $w \in W$ hebben en een valuatie V zodanig dat $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box p \to p$ niet waar is. We mogen dus concluderen dat de formule niet geldig is op het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$.

Opgave 54.

(1) Beschouw het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ met

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *en*
- $R = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle\}$.

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn op $\mathcal{F}$. Geef dus voor elke formule een valuatie V en een wereld $w \in W$ aan en laat zien, gegeven dit Kripke model $\langle W, R, V, w \rangle$, dat de formule onwaar is in deze w gegeven de valuatie V.

(i) $\Box p \vee q$
(ii) $\Diamond q \wedge \Diamond \neg q$
(iii) $\Box p \to p$
(iv) $\Box p \to \Box\Box p$
(v) $\Box p \to \Diamond p$

(2) Beschouw het frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *met*

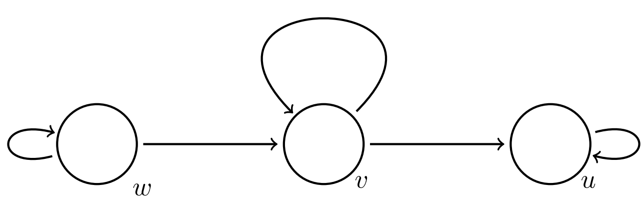
- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ *en*
- $R = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}$.

Laat zien dat de volgende formules niet geldig zijn op $\mathcal{F}$.

(i) $\Diamond p \to \Box p$
(ii) $p \to \Box p$
(iii) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$
(iv) $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$
(v) $\Box(\Box p \to q) \to \Box(\Box q \to p)$

Onthoud: Om te laten zien dat een formule ϕ niet geldig is op een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ moet een valuatie V en een wereld $w \in W$ worden gegeven waarvoor de formule onwaar is, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \phi$.

Op wat voor frames is de formule $\Box p \to p$ dan wel geldig? De formule zegt dat als een (willekeurige) propositie p noodzakelijk waar is in een wereld w van het frame, *i.e.*, als de propositie p waar is in alle werelden die via de relatie R toegankelijk zijn vanuit de wereld w, dan is p dus ook waar in w zelf. Hoe moet het frame eruit zien ongeacht de valuatie voor p? Elke wereld van het frame moet in de relatie R met zichzelf staan. Met andere woorden, deze formule is geldig in een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, als de relatie R reflexief is. Zouden wij bijvoorbeeld aan het frame in afbeelding 4.7 ook nog een pijl van v naar zichelf toevoegen (zie afbeelding 4.8), dan wordt de formule $\Box p \to p$ wel geldig op het frame.



Figuur 4.8

Stelling 4.3.3. *De formule* $\Box p \to p$ *is geldig op reflexieve frames.*

De stelling houdt in dat de formule geldig is op alle reflexieve frames. Dit betekent dat als een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ reflexief is, *i.e.*, R is een reflexieve relatie, dan is $\Box p \to p$ geldig op $\mathcal{F}$, *i.e.*, de formule $\Box p \to p$ is waar in ieder model $\mathcal{M}$ dat gebaseerd is op $\mathcal{F}$. Merk op dat deze stelling de vorm heeft van een conditionele zin. In het bewijs van deze stelling zullen we dus het antecedent aannemen en laten zien dat het consequent hier noodzakelijk uit volgt.

Bewijs. Stel $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ is een reflexief frame. We laten zien dat welke valuatie V en welke $w \in W$ je ook kiest, altijd geldt: $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box p \to p$.

1. Stel V en $w \in W$ zijn willekeurig gekozen.
2. Om te laten zien dat $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box p \to p$ is het voldoende om aan te tonen dat als $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box p$ dan ook geldt $\langle W, R, V, w \rangle \models p$.
   (a) Stel nu $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box p$.
   (b) Dan geldt voor alle werelden v die in de relatie R met w staan (*i.e.*, er loopt een pijl van w naar v), dat p waar is in v (*i.e.*, $\langle W, R, V, v \rangle \models p$).
   (c) De relatie R in frame $\mathcal{F}$ is reflexief. Dat betekent dat elke wereld in $\mathcal{F}$ in de relatie R met zichzelf staat (vanuit elke wereld in $\mathcal{F}$ loopt dus een pijl naar de wereld zelf). Dat geldt dus ook voor onze willekeurig gekozen wereld w.
   (d) Hieruit volgt dat de zin p in ook in w waar is ($\langle W, R, V, w \rangle \models p$).
3. Als $\Box p$ in w waar is, dan dus ook p. Kortom, $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box p \to p$.

Omdat zowel V als w willekeurig gekozen zijn, concluderen wij dat $(\Box p \to p)$ geldig is op het frame $\mathcal{F}$, *i.e.*, $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle \models (\Box p \to p)$. $\Box$

Opgave 55. *Laat zien dat de volgende forumules geldig zijn op het gegeven frame. Geef dus een argumentatie naar aanleiding van bovenstaand voorbeeld waaruit blijkt dat voor elke wereld in het frame en voor elke valuatie geldt dat de formule waar is in die wereld gegeven de gekozen valuatie.*

(i) *Laat zien dat de formule $\Box(p \wedge q) \to \Box p$ geldig is op het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ met $W = \{w_1, w_2\}$ en $R = \{\langle w_1, w_1 \rangle\}$.*

(ii) *Laat zien dat de formule $p \to \Diamond p$ geldig is op het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ met $W = \{w_1, w_2\}$ en $R = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle\}$.*

(iii) *Laat zien dat de formule $\Box p \to \Diamond p$ geldig is op het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ met $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ en $R = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle, \langle w_3, w_1 \rangle\}$.*

(iv) *Laat zien dat de formule $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ geldig is op het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ met $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ en $R = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$.*

Een nauwkeurige kijk naar de argumentatie van bewijs 4.3.3 laat zien dat wij daarin alleen gebruik maken van het feit dat een frame $\mathcal{F}$ reflexief is, alle andere eigenschappen van zo'n frame zijn irrelevant. Daarom wordt er in de modale logica ook vaak gesproken van geldigheid op een verzameling van frames. In dit geval kan dus middels bovenstaande argumentatie worden aangetoond dat de formule $\Box p \to p$ geldig is op de verzameling van reflexieve frames.

Hiermee is het verhaal nog niet compleet. Met behulp van de notie van geldigheid op een frame kunnen wij ook de toegankelijkheidsrelatie R *karakteriseren*. Daarvoor volstaat het niet te laten zien dat een formule ϕ geldig is op de verzameling van frames met een bepaalde eigenschap E (bijvoorbeeld reflexiviteit). We moeten dan ook laten zien dat een formule zoals bijvoorbeel $\Box p \to p$ de frame-eigenschap daadwerkelijk *karakteriseert*, en daarvoor moeten wij tevens aantonen dat de formule *niet* geldig is op frames die de eigenschap E (bijvoorbeeld reflexiviteit) *niet* hebben. Dit is in dit geval evenwel mogelijk. We kunnen aantonen dat de formule $\Box p \to p$ niet geldig is op frames $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ die niet reflexief zijn. Hoe doe je dat? Door een wereld $w \in W$ in het frame aan te geven en een valuatie V te specificeren zodanig dat de formule onwaar wordt in w gegeven V, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to p)$. Het enige waar we van hoeven uit te gaan is dat enig frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ niet reflexief is. Dat geeft ons al voldoende houvast om een valuatie V te definiëren en een wereld $w \in W$ te vinden zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to p)$. En dit volstaat om de concluderen dat $\mathcal{F} \not\models (\Box p \to p)$, ofwel dat de formule $(\Box p \to p)$ niet geldig is op zo'n niet-reflexief frame $\mathcal{F}$.

In het onderhavige geval gaan wij ervan uit dat R niet reflexief is, en niets meer. Dus er moet – geheel los van welke andere eigenschappen R dan ook moge hebben– minstens één wereld zijn die niet in de relatie R met zichzelf staat (*i.e.*, er loopt geen pijl van w naar w). Dit kunnen wij gebruiken voor de definitie van de valuatie V en de wereld w waarvoor de formule onwaar is. We kunnen een valuatie V vinden zodanig dat $\Box p$ waar is in die niet reflexieve wereld w, terwijl p zelf niet waar is in w. In dat geval is $(\Box p \to p)$ dus onwaar in w. Daarmee is aangetoond dat de formule niet geldig is op zo'n (niet-reflexief) frame.

Stelling 4.3.4. *Als $\Box p \to p$ geldig is op $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, dan is $\mathcal{F}$ reflexief, i.e., R is een reflexieve relatie.*

We merken op dat bovenstaande stelling equivalent is aan het volgende: als $\mathcal{F}$ *niet* reflexief is, dan is $\Box p \to p$ *niet* geldig op $\mathcal{F}$. We zullen dus moeten laten we zien dat als een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *niet* reflexief is, dan kunnen we altijd een valuatie V en wereld $w \in W$ vinden zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \Box p \to p$.

Bewijs. Stel dat een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *niet* reflexief is. We willen laten zien dat $\Box p \to p$ niet geldig is op $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} \not\models \Box p \to p$. Hiervoor volstaat het een valuatie V voor $\mathcal{F}$ te definiëren, en een wereld $w \in W$ te kiezen, zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \Box p \to p$.

1. Omdat $\mathcal{F}$ niet reflexief is weten wij dat er een punt $w \in W$ moet bestaan die niet in de relatie R met zichzelf staat, i.e. $\langle w, w\rangle \notin R$. Deze wereld kiezen we als onze evaluatie wereld.
2. Wij nemen een valuatie V zodanig dat $V_v(p) = 1$ desda $\langle w, v\rangle \in R$. Dat betekent volgens de valuatie V is de propositieletter p waar precies op de werelden waarmee w wel in de relatie R staat (*i.e.*, de verzameling van werelden waarnaartoe vanuit w een pijl loopt).

3. Omdat in elke wereld die in de relatie R met w staat p wel waar is volgt ook dat $\Box p$ waar is in w, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$.
4. Omdat w niet in de relatie R met zichzelf staat volgt hieruit dat p onwaar is in w, *i.e.*, $\langle W, R, V, w\rangle \not\models p$.
5. Uit de twee bovenstaande theses volgt $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \Box p \to p$.

Wij hebben dus voor een willekeurige frame die niet reflexief is een valuatie V en een wereld w gevonden zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \Box p \to p$. $\Box$

De bewijzen van stelling 4.3.3 en stelling 4.3.4 die we hebben gezien behelsden *willekeurige* reflexieve respectievelijk niet-reflexieve frames, en zijn dus van toepasing op *alle* reflexieve respectievelijk niet-reflexieve frames. De conclusie is dat de formule $\Box p \to p$ geldig is op alle frames die reflexief zijn, en ongeldig is op alle frames niet reflexief zijn. We concluderen dat de formule reflexieve frames karakteriseert.

Definitie 4.3.5. Een formule ϕ karakteriseert een verzameling $\mathcal{G}$ van frames als voor alle frames $\mathcal{F}$ geldt $\mathcal{F} \models \phi$ dan en slechts dan als $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, *i.e.*, ϕ is geldig alleen op frames $\mathcal{F}$ die element zijn van $\mathcal{G}$.

Opgave 56.

(i) Laat zien dat ook de formule $p \to \Diamond p$ de verzameling van reflexieve frames karakteriseert. Laat dus zien dat de formule geldig is op de verzameling van reflexieve frames, en dat ze ongeldig is op alle niet-reflexieve frames.

(ii) Ook al drukken $(p \to \Diamond p)$ en $(\Box p \to p)$ als valide schema's dezelfde eigenschap van frames uit (reflexiviteit van de toegankelijkheidsrelatie), de twee formules met één en dezelfde propositeletter p zijn zelf onafhankelijk. Vind een model met een wereld waarin de éne formule waar is, en de andere niet.

De notie van *karakteriseren* is interessant voor filosofische toepassingen van de modale logica. Stel bijvoorbeeld, wij lezen de formule $\Box p \to p$ doxastisch ($\Box p$ staat voor *ik geloof dat p*). Dan zegt de formule dus *Als ik geloof dat p, dan is p het geval*. Intuïtief is dit een principe dat voor *geloven* niet klopt. (Het *kan* wel waar zijn, maar het is geen geldig principe.) Wij kunnen nu preciezer zeggen wat dit betekent, namelijk dat wij voor *geloven* aannemen dat het niet op een reflexieve toegankelijkheidsrelatie is gebaseerd. Daarentegen lijkt het principe in een epistemische lezing wel te kloppen: *als ik weet dat p, dan is p waar*. Dus voor *weten* lijken wij wel aan te nemen dat het correspondeert met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie.

Aan het begin van deze sectie vroegen wij ons af of het volgende principe geldt voor geloven: *als ik geloof dat p, dan geloof ik ook dat ik geloof dat p*. Dit kunnen we in de modale logica vertalen als $\Box p \to \Box\Box p$. Vele filosofen zijn het met dit principe wel eens, terwijl er veel discussie is over het negatieve broertje: *als ik niet geloof dat p, dan geloof ik dat ik niet geloof dat p*, vertalen als $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$. We kunnen ons nu weer afvragen wat het eigenlijk voor de relatie R betekent als wij aannemen dat $\Box p \to \Box\Box p$ een geldig principe is. In andere woorden, welke eigenschap van relaties wordt door de formule $\Box p \to \Box\Box p$ gekarakteriseerd? Het blijkt dat dit transitiviteit van R is.

Het idee is kortweg dit. (In de Appendix op blz. 124 wordt dit bewijs in detail uitgespeld.) Stel dat $\Box p$ waar is in een wereld w in een transitief frame. We moeten laten zien dat dan ook $\Box\Box p$ waar is in w. Neem een willekeurige vanuit w toegankelijke wereld v. Natuurlijk moet p dan waar zijn in v. Beschouw nu een willekeurige wereld u toegankelijk vanuit v. Omdat we hebben aangenomen dat R transitief is is die wereld u ook toegankelijk vanuit w. Omdat $\Box p$ waar is in w, is p dus ook waar in u. Dit geldt voor alle werelden u toegankelijk vanuit v, dus $\Box p$ is waar in v. En wat hier gesteld wordt over v geldt voor alle werelden toegankelijk vanuit w, dus $\Box\Box p$ is waar in w. Dus in een transitief frame is $\Box p \to \Box\Box p$ altijd waar.

Het omgekeerde geldt ook. Als een frame *niet* transitief is, dan is de onderhavige formule ook niet geldig op zo'n frame. Zie hiervoor ook de appendix.

Opgave 57.

(i) *Laat zien dat de formule $p \to \Box\Diamond p$ symmetrische frames karakteriseert.*

(ii) *Welk principe drukt deze formule voor geloven uit. Vindt u dit een principe dat klopt voor geloven? Beargumenteer kort uw antwoord.*

4.3.3 Logische geldigheid

De laatste stap in abstractie die wij kunnen ondernemen bestaat er in af te zien van een specifieke keuze voor de verzameling van werelden W en de toegankelijkheidsrelatie R. Dan is dus de keuze van elk element van een Kripke model $\langle W, R, V, w\rangle$ willekeurig. We kunnen dit definiëren door te zeggen dat een formule (logisch) geldig is desda ze waar is in alle Kripke modellen. Maar omdat een formule geldig is op een frame als ze waar is in alle Kripke modellen gebaseerd op dat frame, komt de volgende definitie precies op hetzelfde neer.

Definitie 4.3.6 (Logische geldigheid)**.** Een formule ϕ is geldig desda voor alle frames $\mathcal{F}$ geldt dat $\mathcal{F} \models \phi$; we schrijven dan $\models \phi$.

Zeggen dat een formule φ *logisch geldig* is betekent dus dat φ waar is in alle Kripke modellen $\mathcal{K}$ die gebaseerd kunnen worden op alle frames $\mathcal{F}$. Dit is precies de notie van geldigheid van een formule waarmee we sectie 4.3 zijn begonnen (zie p. 107).
We zijn in deze cursus al voorbeelden tegengekomen van formules die in alle frames geldig te zijn. Alle formules van de vorm van een tautologie in de propositielogica zijn geldig in alle modellen van de modale propositielogica. Dus, bijvoorbeeld, een formule $\Diamond p \vee \neg\Diamond p$ is onverkort geldig. Tevens vinden we dat de volgende dualiteitswetten geldig zijn:

$$\neg\Diamond\phi \leftrightarrow \Box\neg\phi$$
$$\neg\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\neg\phi$$

Merk op dat deze principes volstrekt analoog zijn aan de predikaatlogische principes $\neg\exists x\phi \leftrightarrow \forall x\neg\phi$ en $\neg\forall x\phi \leftrightarrow \exists x\neg\phi$.

Eén en ander houdt in dat $\Diamond\phi$ en $\neg\Box\neg\phi$ equivalent zijn, en ook $\Box\phi$ en $\neg\Diamond\neg\phi$. Er is nog één heel bekende formule—of beter: formuleschema—dat algemeen geldig is. Dit is de formule **K**, die het distributie-principe voor $\Box$ verwoordt:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \tag{\textbf{K}}$$

Dit kan kort als volgt worden beargumenteerd. (In de Appendix kan de lezer een uitvoeriger bewijs aantreffen.) Voor een willekeurige wereld w in een willekeurig model K geldt dat als $\Box(p \to q)$ en $\Box p$ waar zijn in w, dan geldt voor alle toegankelijke werelden v zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$ dat $(p \to q)$ en p waar zijn in v. Dit betekent dat q waar is in al die toegankelijke werelden, en derhalve is $\Box q$ waar in w. Dus *als* $\Box(p \to q)$ waar is in w dan is $(\Box p \to \Box q)$ dat ook. Derhalve is $(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$ onverkort waar in w, voor willekeurige w.

Met de modale logica kunnen we op bijzonder adequate wijze principes van bepaalde noties, zoals geloven, moeten, enz., formuleren. Bovendien, omdat de betekenis van deze noties precies vastligt, kunnen we aantonen welke ontologische veronderstellingen we maken als we een bepaald principe accepteren. Dit kan in de filosofie als argument ingezet worden: als je de formalisering van de notie onder beschouwing accepteert, en de vertaling van het principe, dan committeer je je tot een bepaalde formeel-ontologische veronderstelling. Logica dient hier dus het begrip door de noties waar we in geïnteresseerd zijn eenduidig vast te leggen en duidelijk te maken wat de consequenties zijn van het voor waar aannemen van bepaalde principes.

4.4 Verschillende interpretaties van modaliteiten

We hebben de modale operatoren geassocieerd met *Het is mogelijk dat* en *Het is noodzakelijk dat*. In de traditie van de modale logica zijn dat ook de standaard interpretaties van $\Diamond$ en $\Box$, en het zijn zeker ook deze filosofische interpretaties die in eerste instantie hebben geleid tot de ontwikkeling van de modale logica in de jaren zestig van de vorige eeuw. In de inleiding zijn ook al andere interpretaties van de modale operatoren besproken: *geloven*, *weten*, *mogen* en *moeten.* De modale logica kan toegepast worden in de studie van alle relationele structuren, zoals die van verwantschapsrelaties, relationele databases of taalkundige boomdiagrammen. Kortom, de modale logica omspant een groot vakgebied met een grote hoeveelheid aan theoretische en praktische toepassingen. Hoewel we in het kader van deze cursus niet een volledig overzicht aan kunnen bieden, willen we wel de toepassing van de modale logica in de doxastische en de deontische logica nader bekijken. Ook willen we een idee geven van de toepassing in de temporele logica.

		modaliteit		
eigenschap	formule	doxastisch	deontisch	temporeel
reflexiviteit	$\Box p \to p$ of $p \to \Diamond p$	-	-	-
symmetrie	$\Diamond\Box p \to p$ of $p \to \Box\Diamond p$	-	-	-
transitiviteit	$\Box p \to \Box\Box p$ of $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	✓?	-?	✓

Tabel 4.1: Overzicht: eigenschappen toegankelijkheid, karakeriserende formules en modaliteiten

4.4.1 Doxastische Logica

Zoals al eerder gesteld zijn er meerdere manieren om over de notie 'mogelijkheid' na te denken. De modale logica stelt ons in staat om onze intuïties over die verschillende interpretaties te formaliseren. In de doxastische logica gaat het er om wat een 'agent' voor mogelijk houdt. Voor zo'n agent geeft de toegankelijkheidsrelatie R aan wat volgens die agent de actuele wereld zou kunnen zijn. De agent heeft ideeën over de wereld waarin hij of zij leeft, maar hoeft niet alles te weten en kan het ook mis hebben. Een toegankelijkheidsrelatie R zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$ geeft dan dus aan dat voor die agent in w het zo zou kunnen zijn dat v de actuele wereld is. Volgens zijn of haar informatie is het niet uitgesloten dat hij of zij in v leeft.

Voor de formele definitie van het modale systeem maakt deze interpretatie niet veel verschil, maar voor onze interpretatie ervan wel. Gegeven een agent a betekent een formule $\Diamond\phi$ nu dat die agent a ϕ niet uitgesloten acht; en de betekenis van $\Box\phi$ wordt dat agent a gelooft dat ϕ sowieso waar is. In alle mogelijke werelden die overeenkomen met wat hij of zij gelooft zou ϕ immers waar moeten zijn. Deze hernieuwde interpretatie van $\Diamond$ en $\Box$ leidt ertoe dat we sommige van de bovengenoemde principes moeten opgeven.

Het is onrealistisch om te verwachten dat wat iemand gelooft ook waar is. Mensen kunnen zich vergissen. Dus $(\Box p \to p)$ is niet meer algemeen geldig. De conclusie is dat de doxastische interpretatie van de modale operatoren dus niet een reflexieve toegankelijkheidsrelatie hoeft te veronderstellen.

Wat zou symmetrie van de toegankelijkheidsrelatie betekenen onder de doxastische interpretatie van de modale operatoren? Het zou zeggen dat als onze agent a in een wereld w het mogelijk acht dat hij of zij in een wereld v leeft, dat diezelfde agent in v het mogelijk acht dat hij of zij misschien in wereld w leeft. Dit lijkt ook geen plausibel principe. Redelijke agenten weten dat ze zich kunnen vergissen. Het principe dat $(p \to \Box\Diamond p)$ algemeen geldig is moet dus ook opgegeven worden. (Er zit hier een heel lastige adder onder het gras, die te maken heeft met de vraag hoe we weten dat we het over dezelfde agent hebben in w en v.)

Transitiviteit is een onderwerp van discussie. Onder de doxastische interpretatie van de modale operatoren houdt transitiviteit in dat je, in principe, als je gelooft dat iets het geval is, je ook gelooft dat je gelooft dat dat het geval is. Sommige taalkundigen noemen dit 'Plato's probleem' en dat is nogal een misleidende aanduiding. Voor Plato was het zeker geen probleem en het punt betreft eigenlijk de door hem gepropageerde socratische methode. Als iemand gelooft of denkt te weten dat p, dan kan die agent bij zichzelf nagaan dat hij dat gelooft of denkt te weten. Dus als hij gelooft dat p dan weet of gelooft hij in principe dat hij gelooft dat p. Dit principe wordt uitgedrukt door het schema $(\Box p \to \Box\Box p)$, dat aangeeft dat de toegankelijkheidsrelatie transitief is. In logische kringen wordt dit principe vrij algemeen geaccepteerd, onder de noemer van 'positieve introspectie'. In filosofische kringen wordt het principe, terecht, betwijfeld.

Opgave 58. *Wat zegt het principe dat* $(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ *als we* $\Diamond$ *en* $\Box$ *opvatten als een doxastische relatie? Vind je dit principe plausibel?*

4.4.2 Deontische Logica

We hebben de formules $\Diamond\phi$ en $\Box\phi$ ook geïnterpreteerd als *Het is toegestaan dat* ϕ en *Het is verplicht dat* ϕ. Ook al zijn er gerede twijfels over de vraag of de modale logica wel een inhoudelijke insteek kan bieden op de vraag wat de logica is van *Wat mag* en *Wat moet*, toch zijn er redelijke inhoudelijke verbanden. Immers, als het niet zo is dat iets moet, dan mag het dus ook niet zo zijn; en als het niet zo is dat iets mag, dan moet het dus niet zo zijn. Deze observaties worden weerspiegeld in de modale logische wetten dat $\neg\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\neg\phi$ en $\neg\Diamond\phi \leftrightarrow \Box\neg\phi$.

Ook geldt de distributiewet in de deontische logica. Als het zo moet zijn dat als p dan q, en als het zo moet zijn dat p, dan moet het ook zo zijn dat q. Dit principe wordt neergelegd in het distributie-schema $(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$. Een regelsysteem dat niet aan deze eis voldoet is inconsistent. (Opgemerkt zij dat zulke regelsystemen dus wel bestaan maar dat er logisch gesproken niet mee valt te leven.)

Over de voornoemde verdere principes van de modale logica kunnen we kort zijn. Het schema $(\Box p \to p)$ is onder de deontische interpretatie wellicht wenselijk maar niet realistisch. Neem Amsterdam: je moet voor een rood licht stoppen maar dat betekent niet dat iedereen dat ook doet. Als dit schema geldig was dan was er geen politie nodig. Symmetrie van de toegankelijkheidsrelatie, uitgedrukt door $(p \to \Box\Diamond p)$, heeft geen enkele intuïtieve inhoud. Over transitiviteit valt wederom te discussiëren. Dogmatici kunnen zeggen dat als iets verplicht is dat het dan ook verplicht verplicht is, want zo moet het nu eenmaal. De meesten onder ons zullen zeggen dat iets wel verplicht kan zijn, maar dat die verplichting er niet had hoeven zijn. Als je het met deze laatste positie eens bent moet je het principe $(\Box p \to \Box\Box p)$ onder de deontische interpretatie ook opgeven.

Een principe dat in de deontische logica wel vaak wordt gehanteerd is het volgende.

- $(\Box p \to \Diamond p)$.

Immers, wat verplicht is moet mogen. Stel namelijk dat dit principe niet waar is voor een propositieletter p in een model $\mathcal{K}$. Dan vinden we dat $\mathcal{K} \models (\Box p \wedge \neg\Diamond p)$ dwz, $\mathcal{K} \models (\Box p \wedge \Box\neg p)$.

Opgave 59. *Bewijs deze laatste claim.*

De laatste formule stelt op zijn beurt dat p zowel als $\neg p$ verplicht zijn. Een heikele situatie natuurlijk. Het principe $\Box p \to \Diamond p$ komt erop neer dat de deontische toegankelijkheidsrelatie R altijd een mogelijkheid biedt om aan de verplichtingen te voldoen. Dat wil zeggen dat voor alle $w \in W$ geldt dat er een $v \in W$ is zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$. Dit is de formele karakterisering van het idee dat een verplichting ook toegestaan moet zijn.

Opgave 60. *Een beetje karikaturaal kan je stellen dat in Amsterdam het gedoogbeleid wordt gehanteerd dat als p dan is p toegestaan. Als iedereen een bepaalde fietsroute over het Spui kiest, dan wordt dat fietspad. Is het principe $(p \to \Diamond p)$ onder de deontische interpretatie van $\Diamond$ dus geldig in Amsterdam?*

4.4.3 Temporele Logica

De laatste toepassing van de modale logica die we in dit hoofdstuk bespreken betreft de temporele logica. Het jargon, de notatie en de formele taal zullen enigszins veranderen, maar het idee blijft logisch gesproken hetzelfde. Een belangrijke terminologische verandering is wel dat we niet meer over mogelijke werelden praten, maar over tijdspunten, en voor de duidelijkheid duiden we de verzameling tijdspunten aan als T in plaats van W. Het idee achter de toegankelijkheidsrelatie wordt daarmee wel begrijpelijker. Een tijdspunt t' is toegankelijk vanuit tijdspunt t, dat wil zeggen $\langle t, t'\rangle \in R$, als $t < t'$. Om deze reden wordt R nu kortweg $<$ genoemd. Zoals we zullen zien is de toegankelijkheidsrelatie of ordening $<$ niet automatisch gegeven. We nemen wel aan dat $<$ asymmetrisch is, en transitief en irreflexief. Deze punten worden hieronder nader behandeld.

Een interessant verschil met de modale logica's die we hierboven gezien hebben is dat de $\Diamond$ en $\Box$ nu ieder twee zinnige interpretaties hebben. In een temporele logica kan je twee kanten op kijken. Als je op een tijdspunt staat kan je redeneren over wat er in de toekomst gebeurt, dus over de tijdspunten die toegankelijk zijn vanuit daar, maar ook over wat er in het verleden is gebeurd, dus over de tijdspunten waarvandaan het huidige tijdspunt toegankelijk is. Er zijn twee operatoren F en G die 'vooruit' kijken, en twee operatoren P en H die 'achteruit' kijken. De operatoren F en P corresponderen met de $\Diamond$. De eerste F zegt *Ergens in de toekomst* en de tweede P zegt *Ergens in het verleden*. De operatoren G en H corresponderen met de $\Box$. De eerste G zegt overal in de toekomst en de tweede H zegt overal in het verleden. De waarheid van atomaire proposities is vanzelfsprekend afhankelijk van het tijdstip waarop ze geëvalueerd worden.

Definitie 4.4.1 (Semantiek van de Temporele Propositie Logica)**.**

$\langle T, <, V, t\rangle \models p$ desda $V_t(p) = 1$
$\langle T, <, V, t\rangle \models \neg\phi$ desda $\langle T, <, V, t\rangle \not\models \phi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models \phi \wedge \psi$ desda $\langle T, <, V, t\rangle \models \phi$ en $\langle T, <, V, t\rangle \models \psi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models \phi \vee \psi$ desda $\langle T, <, V, t\rangle \models \phi$ of $\langle T, <, V, t\rangle \models \psi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models \phi \rightarrow \psi$ desda $\langle T, <, V, t\rangle \not\models \phi$ of $\langle T, <, V, t\rangle \models \psi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models F\phi$ desda er is een $t' \in T$ z.d.d. $t < t'$ en $\langle T, <, V, t'\rangle \models \phi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models P\phi$ desda er is een $t' \in T$ z.d.d. $t' < t$ en $\langle T, <, V, t'\rangle \models \phi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models G\phi$ desda voor elke $t' \in T$ z.d.d. $t < t'$: $\langle T, <, V, t'\rangle \models \phi$
$\langle T, <, V, t\rangle \models H\phi$ desda voor elke $t' \in T$ z.d.d. $t' < t$: $\langle T, <, V, t'\rangle \models \phi$

Nog even los van de specieke ideeën die we kunnen hebben over de temporele ordening $<$ kunnen we wel al vaststellen dat de volgende twee principes geldig zijn:

$$(p \rightarrow HFp)$$
$$(p \rightarrow GPp)$$

Als een propositie p het geval is dan is het altijd zo geweest dat p een keer het geval kon zijn; en ook zal het dan vanaf dat moment altijd zo zijn dat p het geval is geweest. Deze twee principes drukken uit dat het ‘nu’ in de toekomst ligt van elk verleden van het ‘nu’, en dat het ‘nu’ het verleden is van elke toekomst van het ‘nu’. Kort gezegd, ‘eerder dan’ is het symmetrische beeld van ‘later dan’.

Opgave 61. *Geef aan waarom de bovengenoemde principes geldig zijn.*

Zoals gezegd nemen we aan dat de temporele ordening transitief is. Als er in de toekomst t' een bepaalde mogelijke toekomst t'' is dan is dat ook een mogelijke toekomst nu. We kunnen dit idee afdwingen door middel van de schema's die we in de modale propositielogica gebruikten. We kunnen bijvoorbeeld

$$(FFp \rightarrow Fp)$$

als een geldig principe accepteren. Als dit schema geldig is dan betekent het dat we in een frame leven, in dit geval een temporele ordening, waar geldt dat als in de toekomst van een toekomst van nu p waar is, dan is p waar in een toekomst van nu. Let op. Dit principe zegt absoluut niet dat in de toekomst eerdere toekomsten zijn uitgesloten. Het stelt alleen iets heel simpels. Als je via $<$ van het t_{nu} ergens terecht kan komen, bijvoorbeeld t', waarvandaan je verder kan komen, bijvoorbeeld t'', dan kan je van t_{nu} bij t'' komen. Dit is precies het idee van de transitiviteit van de temporele ordening.

Er zijn drie andere principes die, als we ze als geldig accepteren, precies hetzelfde uitdrukken.

Opgave 62. *Welke bijvoorbeeld?*

In de temporele logica zijn er echter nog fraaier en intuïtiever methodes om onze intuïties over de transitiviteit van $<$ uit te drukken. We kunnen immers gebruik maken van de 'heen' en 'weer' kijkende operatoren. Het aannemen van het volgende, zeer intuïtieve, principe impliceert ook dat de temporele ordening transitief is.

$$(Pp \to GPp)$$

Dit principe stelt eigenlijk dat wat in het verleden is gebeurd nooit ontkend kan worden. Er is geen toekomst waarin wat gebeurd is ineens niet gebeurd is. Het kan bewezen worden dat ook dit principe geldig is op grond van de transitiviteit van de ordening $<$. Het bewijs is gebaseerd op het volgende idee. Stel dat we op een bepaald moment t_{nu} vaststellen dat p in het verleden is gebeurd, dat is wat Pp zegt. Dus er is een t zodanig dat $t < t_{nu}$ en p is waar op t. Stel voorts dat er een toekomst t' is zodanig dat $t_{nu} < t'$. Omdat het verleden niet kan veranderen moet ook dan, op t' gelden dat Pp. Dit geldt voor alle mogelijke toekomsten van t_{nu} dus GPp is waar op t_{nu}. Het principe is daarom geldig. Maar nu hebben we bijstand nodig van de temporele logica. Bovenstaande redenering is alleen sluitend als $t < t_{nu} < t'$ impliceert dat $t < t'$, dus alleen als $<$ transitief is.

Opgave 63. *Laat dit zien.*

Het aannemen van het schema $(Pp \to GPp)$ betekent dus dat in ons begrip van de temporele ordening deze ordening transitief is.

We kunnen een analoog argument geven voor het principe dat stelt dat wat in de toekomst kan gebeuren altijd al in de toekomst kon gebeuren. Dit principe kan gekarakteriseerd worden door het schema $(Fp \to HFp)$. We zullen dit hier niet beargumenteren of bewijzen.

Opgave 64. *Laat zien dat het aannemen van het laatstgenoemde principe ook transitiviteit van de temporele ordening inhoudt.*

Een punt dat wel aandacht verdient, en dat in deze syllabus niet fatsoenlijk behandeld kan worden, betreft ons gebruikt van de termen 'het verleden' en 'de toekomst'. We willen er wel kort iets over zeggen. Als je een bepaald soort deterministische visie aanhangt dan is de toekomst volledig bepaald door het heden. (En dus ook door het verleden.) Dit zou betekenen dat de temporele ordening $<$ geen 'vertakkingen' toestaat. Dat wil zeggen dat het niet mogelijk is dat $t_{nu} < t_1$ en $t_{nu} < t_2$ en vanaf t_1 en t_2 verloopt de geschiedenis anders. We nemen hier geen standpunt over in maar willen wel aanmerken dat deze intuïtie of non-intuïtie ook in een formuleschema gevat kan worden (ga na welk schema!).

Iets vergelijkbaars kan gezegd worden over het verleden, en dat is waarschijnlijk veel aansprekender. Natuurlijk heeft iedereen zijn eigen verleden, maar die verledens maken deel uit van één groot verleden: de geschiedenis. Het is politiek en filosofisch incorrect om te denken dat we een verleden hebben met WO-I en WO-II, en tegelijkertijd een verleden waarin WO-I en WO-II niet gebeurd zouden zijn. Vertakkingen van $<$ in het verleden zijn dus bijzonder dubieus.

Gelukkig stelt de temporele logica ons in staat om deze intuïties te formuleren middels de aanname van het principe $P\phi \rightarrow H(P\phi \vee \phi \vee F\phi)$.

Met behulp van een aantal axioma's kunnen we andere ideeën over de temporele ordening uitdrukken. Laten we $\top$ gebruiken voor een standaard tautologie $(p \vee \neg p)$ en $\bot$ voor een standaard contradictie $(p \wedge \neg p)$. Dan kun je uitdrukken dat de temporele orde geen eind heeft door het aannemen van het principe $F\top$, en dat ze geen begin heeft door het aannemen van het principe $P\top$. Mocht je menen dat er een begin is van de tijd, dan kan je postuleren dat $PH\bot$ en als je gelooft in het eind der tijden dan postuleer je dat $FG\bot$.

Andere interessante ideeën over de temporele ordening kunnen uitgedrukt worden in de modale of temporele logica, maar het voert ons hier te ver om die in dit bestek te bespreken. We kunnen het niet nalaten om toch ook een negatief resultaat te noemen.

Onze intuïties over de irreflexiviteit van de temporele ordening kunnen we niet karakteriseren. Volgens de meest gangbare intuïtie kan het niet zo zijn dat $t_{nu} < t'$ en t' is hetzelfde als t_{nu}. (Natuurlijk kan wel alles hetzelfde zijn gebleven, maar het is een ander tijdspunt—de klok tikt door.) Dit betekent dat onze toegankelijkheidsrelatie $R = <$ *irreflexief* is. Helaas kunnen we dit niet formeel afdwingen in de taal van de modale of de temporele logica.

Het bewijs voor deze observatie is heel abstract, en vormt geen deel van de examenstof. Het geeft wellicht wel een idee van de logische methodes die je kan gebruiken. Stel dat er een formule ϕ is die kan aangeven of je in een irreflexief frame leeft of niet. Neem een modaal logisch model $\mathcal{M}$ met twee werelden w_1 en w_2 en zodanig dat ze ononderscheidbaar zijn: $V_{w_1} = V_{w_2}$. Bovendien nemen we aan $R = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle\}$, dus R is irreflexief. Neem nu een model $\mathcal{M}'$ met alleen w_1 en zodanig dat $R = \{\langle w_1, w_1\rangle\}$ dus R is reflexief. Het valt te bewijzen dat alles wat geldig is op $\mathcal{M}$ ook geldig is op $\mathcal{M}'$, en omgekeerd. Dus ook de formule ϕ is geldig op $\mathcal{M}$ desda ϕ is geldig op $\mathcal{M}'$. Dus ϕ maakt geen onderscheid tussen een irreflexief model en een model dat dat niet is. $\bot$ We hebben een contradictie bereikt, en dat betekent dat er dus niet zo'n formule ϕ kan zijn.

De details van dit bewijs zijn overigens nog wat gecompliceerder, en daar gaan we hier niet op in. De moraal is echter niet negatief. Dat we kunnen laten zien dat een bepaalde eigenschap van modellen niet karakteriseerbaar is laat geen zwakte van het systeem van de modale logica zien, maar juist de kracht. Het systeem stelt ons in staat om dingen te bewijzen over wat het wel en niet kan. Het moet tevens gezegd worden dat er varianten zijn van de modale logica, bijvoorbeeld de zogeheten hybride logica, waarin irreflexiviteit van de toegankelijksrelatie wel weer gekarakteriseerd kan worden, evenals andere aansprekende eigenschappen. Zulke alternatieve logica's zouden echter nooit ontwikkeld zijn als niet op basis van de standaard modale logica.

Appendix

In deze appendix bewijzen wij enige resultaten genoemd in de tekst in meer detail.

Stelling 4.4.2 (Reflexiviteit)**.** *De formule* $(\Box p \to p)$ *karakteriseert reflexieve frames.*

De stelling houdt in dat de formule geldig is op alle reflexieve frames, en ongeldig op frames die niet reflexief zijn. Het bewijs bestaat dus uit twee delen. In het eerste gedeelte wordt aangetoond dat $(\Box p \to p)$ waar is in ieder model $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$ waarvan geldt dat het een instantiatie is van een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ waarin R reflexief is. In het tweede gedeelte laten we zien dat als een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *niet* reflexief is, dan kunnen we altijd een valuatie V en wereld $w \in W$ vinden zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to p)$ en derhalve dat $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$ en $\langle W, R, V, w\rangle \not\models p$.

Reflexiviteit. *Deel I*. Stel $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ is een reflexief frame. We laten zien dat welke valuatie V en welke $w \in W$ je ook kiest, altijd geldt: $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box p \to p)$.

1. Stel V en $w \in W$ zijn willekeurig gekozen.
2. Om te laten zien dat $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box p \to p)$ is het voldoende om aan te tonen dat als $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$ dan ook geldt $\langle W, R, V, w\rangle \models p$.
   (a) Stel nu $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$.
   (b) Dan geldt voor alle werelden v die in de relatie R met w staan (i.e. er loopt een pijl van w naar v), dat p waar is in v (i.e. $\langle W, R, V, v\rangle \models p$).
   (c) De relatie R in frame $\mathcal{F}$ is reflexief. Dat betekent dat elke wereld in $\mathcal{F}$ in de relatie R met zichzelf staat (vanuit elke wereld in $\mathcal{F}$ loopt dus een pijl naar de wereld zelf). Dat geldt dus ook voor onze willekeurig gekozen wereld w.
   (d) Hieruit volgt dat de zin p in ook in w waar is ($\langle W, R, V, w\rangle \models p$).
3. Als $\Box p$ in w waar is, dan dus ook p. Kortom, $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box p \to p)$.

Omdat zowel V als w willekeurig gekozen zijn, concluderen wij dat $(\Box p \to p)$ geldig is op het frame $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle \models (\Box p \to p)$.

Deel II. Stel dat een frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *niet* reflexief is. We willen laten zien dat $(\Box p \to p)$ niet geldig is op $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} \not\models (\Box p \to p)$. Hiervoor volstaat het een valuatie V voor $\mathcal{F}$ te definiëren, en een wereld $w \in W$ te kiezen, zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to p)$.

1. Omdat $\mathcal{F}$ niet reflexief is weten wij dat er een punt $w \in W$ moet bestaan die niet in de relatie R met zichzelf staat, i.e. $\langle w, w\rangle \notin R$. Deze wereld kiezen we als onze evaluatie wereld.

2. Wij nemen een valuatie V zodanig dat $V_v(p) = 1$ desda $\langle w, v\rangle \in R$. Gegeven V volgt hieruit dat de propositieletter p waar precies in de werelden waarmee w wel in de relatie R staat (i.e. de verzameling van werelden waarnaartoe vanuit w een pijl loopt).

3. Omdat in elke wereld die in de relatie R met w staat p wel waar is volgt ook dat $\Box p$ waar is in w, i.e. $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$.

4. Omdat w niet in de relatie R met zichzelf staat volgt hieruit dat p onwaar is in w, i.e. $\langle W, R, V, w\rangle \not\models p$.

5. Uit de twee bovenstaande theses volgt $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to p)$.

Wij hebben dus voor een willekeurige frame die niet reflexief is een valuatie V en een wereld w gevonden zodanig dat $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to p)$. $\Box$

De twee deelbewijzen behelsden *willekeurige* reflexieve respectievelijk niet-reflexieve frames, en zijn dus van toepasing op *alle* reflexieve respectievelijk niet-reflexieve frames. De conclusie is dat de formule $(\Box p \to p)$ geldig is op alle frames die reflexief zijn, en ongeldig is op alle frames niet reflexief zijn. We concluderen dat de formule reflexieve frames karakteriseert.

Stelling 4.4.3 (Transitiviteit)**.** *De formule* $(\Box p \to \Box\Box p)$ *karakteriseert transitieve frames.*

De stelling houdt in dat de formule geldig is op alle transitieve frames, en ongeldig op frames die niet transitief zijn. Het bewijs bestaat dus weer uit twee delen.

Transitiviteit. Deel I. Stel $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ is een willekeurig transitief frame. Wij willen laten zien $\langle W, R\rangle \models (\Box p \to \Box\Box p)$, i.e dat voor elke valuatie V en elke wereld $w \in W$ geldt $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box p \to \Box\Box p)$. Hiervoor is het voldoende om aan te tonen dat als $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$, dan ook $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box\Box p$.

- Stel, voor een willekeurige V en $w \in W$, we vinden dat $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$. Dit betekent dat voor alle werelden $v \in W$ toegankelijk vanuit w geldt $\langle W, R, V, v\rangle \models p$ (zie afbeelding 4.9).

- Neem nu een willekeurige u: $\langle w, u\rangle \in R$ en $z : \langle u, z\rangle \in R$. Omdat R transitief is geldt tevens $\langle w, z\rangle \in R$, en derhalve $\langle W, R, V, z\rangle \models p$.

- Omdat z willekeurig was geldt $\langle W, R, V, u\rangle \models \Box p$, en omdat u willekeurig was geldt tevens $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box\Box p$.

- Om kort te gaan $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box p \to \Box\Box p)$.

Omdat V en w willekeurig gekozen zijn zien we dat $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle \models (\Box p \to \Box\Box p)$.

Deel II. Wij laten nu zien dat de formule niet geldig is op frames die niet transitief zijn. Stel $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ is een willekeurig niet-transitief frame. Dit betekent dat er werelden $w, v, u \in W$ zijn zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$, $\langle v, u\rangle \in R$, maar $\langle w, u\rangle \notin R$ (i.e. er loopt een pijl van w naar v en er loopt een pijl van v naar u, maar er loopt geen pijl van w naar u, zie afbeelding 4.10). Wij willen laten zien dat dit gegeven voldoende is om een valuatie V te definiëren en een wereld $x \in W$ te vinden zodanig dat in x de formule $(\Box p \to \Box\Box p)$ onwaar is (i.e. $\langle W, R, V, x\rangle \not\models (\Box p \to \Box\Box p)$). Vanzelfsprekend is deze wereld x de wereld w van waaruit transitiviteit faalt.

- Neem een valuatie V zodanig dat $V_z(p) = 1$ desda $\langle w, z\rangle \in R$, i.e. p is waar in en alleen in de werelden die toegankelijk zijn vanuit w. Dat betekent in het bijzonder dat p niet waar is in u (zie afbeelding 4.10).

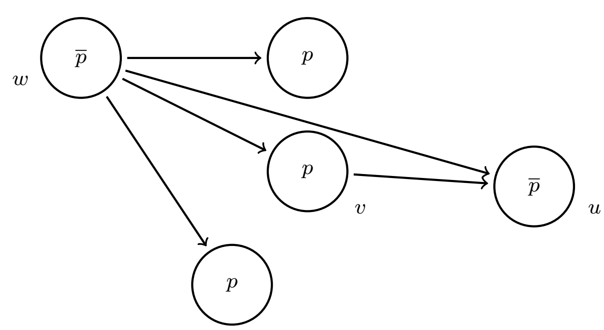
- Uit de keuze van V volgt onmiddellijk dat $\Box p$ waar is in wereld w, i.e. $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$.

- Echter, de formule $\Box p$ is niet waar in v, i.e. $\langle W, R, V, v\rangle \not\models \Box p$, want er is minstens één wereld toegankelijk vanuit v – namelijk wereld u – waarin p niet waar is.

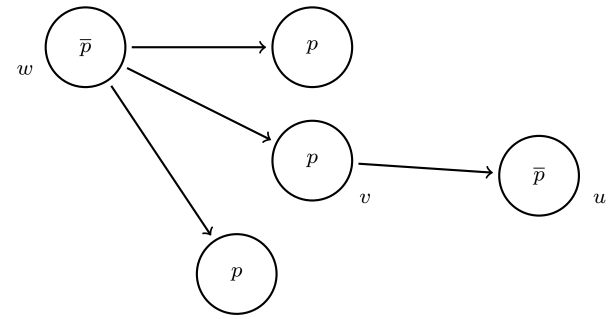
- Dit betekent dat de formule $\Box\Box p$ niet waar is in w, i.e. $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \Box\Box p$, want er is minstens één wereld toegankelijk vanuit w – namelijk wereld v – waarin $\Box p$ niet waar is.

- We hebben dus nu laten zien dat gegeven de valuatie V geldt dat de formule $\Box p$ waar is in wereld w, maar de formule $\Box\Box p$ onwaar. Hieruit volgt dat de formule $(\Box p \to \Box\Box p)$ onwaar is in w, i.e. $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (\Box p \to \Box\Box p)$.

Wij hebben derhalve laten zien dat $(\Box p \to \Box\Box p)$ niet geldig is op het niet-transitieve frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$. Omdat de keuze van het niet-transitieve frame willekeurig was kunnen wij dus concluderen dat de formule $\Box p \to \Box\Box p$ niet geldig is op alle niet-transitieve frames. $\Box$



Figuur 4.9



Figuur 4.10

Stelling 4.4.4 (Symmetrie)**.** *De formule* $(p \to \Box\Diamond p)$ *karakteriseert symmetrische frames.*

Symmetrie (Schets). Deel I. Neem een willekeurig model $\langle W, R, V, w\rangle$ gebaseerd op een willekeurig symmetrisch frame, en stel dat $\langle W, R, V, w\rangle \models p$. Neem een willekeurige v zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$. Omdat R symmetrisch is hebben we ook $\langle v, w\rangle \in R$. Omdat $\langle W, R, V, w\rangle \models p$, hebben we ook $\langle W, R, V, v\rangle \models \Diamond p$. Omdat v een willekeurige wereld is toegankelijk vanuit w, geldt dus tevens $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box\Diamond p$. Kortom, voor willekeurige w in een willekeurig symmetrisch model $\langle W, R, V, w\rangle$ vinden we $\langle W, R, V, w\rangle \models (p \to \Box\Diamond p)$.

Deel II. Stel frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ is niet symmetrisch, dat wil zeggen dat er w en v zijn zodanig dat $\langle w, v\rangle \in R$ en $\langle v, w\rangle \notin R$. Neem V zodanig dat $V_u(p) = 1$ desda $u = w$. In dat geval vinden we:

1. $\langle W, R, V, w\rangle \models p$,
2. $\langle W, R, V, v\rangle \not\models \Diamond p$,
3. $\langle W, R, V, w\rangle \not\models \Box\Diamond p$, dus
4. $\langle W, R, V, w\rangle \not\models (p \to \Box\Diamond p)$.

De laatste observatie houdt in dat $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle \not\models (p \to \Box\Diamond p)$, ofwel dat de formule niet geldig is op $\mathcal{F}$. $\Box$

Stelling 4.4.5 (Distributie)**.** $(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$ *is logisch geldig.*

Distributie. Zij $\mathcal{K} = \langle W, R, V, w\rangle$ een willekeurig Kripke-model. Wij willen laten zien dat $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$. Hiervoor is het voldoende om aan te tonen dat als $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box(p \to q)$, dan ook $\langle W, R, V, w\rangle \models (\Box p \to \Box q)$. Om dat laatste te laten zien is het voldoende om te laten zien dat, als $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box(p \to q)$, en tevens $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box p$, dan ook $\langle W, R, V, w\rangle \models \Box q$.

- Stel dus in wereld w is de formule $\Box(p \to q)$ waar. Dan geldt voor alle werelden v toegankelijk vanuit w dat $(p \to q)$ waar is in v.

  - Stel dat ook $\Box p$ waar is in w. Dan is p ook waar in alle vanuit w toegankelijke werelden v.
  - Als in enige vanuit w toegankelijke wereld v zowel $(p \to q)$ en p waar zijn, dan is q ook waar in v.
  - Derhalve is q waar in alle vanuit w toegankelijke werelden, en dus is $\Box q$ waar in w.

- Dus in een wereld w waarin de formule $\Box(p \to q)$ waar is, is, als $\Box p$ waar is, $\Box q$ ook waar. Ofwel de formule $(\Box p \to \Box q)$ is ook waar in w.

We concluderen dat, uit de aanname dat $\Box(p \to q)$ waar is in w volgt dat $(\Box p \to \Box q)$ waar is in w. Met andere woorden: $(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$ is waar in w. Omdat de keuze van frame, valuatie en wereld willekeurig waren kunnen wij dus concluderen dat de formule $(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$ logisch geldig is. $\Box$