Extra opgaven predikatenlogica

Opgave 1 Gegeven is de volgende vertaalsleutel: Gx: x is gelukkig; Hxy: x houdt van y. Neem als domein de verzameling van mensen. Vertaal de volgende formules in Nederlandse zinnen:

a. $\forall x(Hxx \rightarrow Gx)$

b. $\forall x(\exists yHyx \rightarrow Gx)$

c. $\forall x\forall y(Gy \rightarrow Hxy)$

d. $\forall x(\exists y\exists z((Hxy \wedge Hxz \wedge y \neq z) \rightarrow \neg Gx)$

e. $\forall x\forall y\forall z((Hxy \wedge Hxz \wedge y \neq z) \rightarrow \neg(Gx \wedge Gy \wedge Gz))$

Opgave 2 Gegeven is de volgende vertaalsleutel: Tx: x komt te laat; Wxy: x wacht op y; Rx: x x heeft een rothumeur. Neem als domein de verzameling van mensen. Vertaal de volgende formules in Nederlandse zinnen:

a. $\forall x(Tx \rightarrow \neg\exists yWyx)$

b. $\forall x\forall y((Wxy \wedge Ty) \rightarrow Rx)$

c. $\forall x(\exists y(Wxy \wedge Ty) \rightarrow Rx)$

d. $\exists y\forall x((Tx \wedge \neg Rx) \rightarrow Wyx)$

e. $\forall x(\exists y\exists z(Wyx \wedge Wzx \wedge Ry \wedge Rz \wedge y \neq z) \rightarrow Tx)$

Opgave 3 Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 1-plaatsige predikaatletter A en een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$I(A) = \{1, 2, 5\}$$
$$I(R) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,5\rangle\}$$

a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, het predikaat Ax te interpreteren als 'x is omcirkeld', en de relatie Rxy als 'er loopt een pijl van x naar y'.

b. Ga van de volgende formules na wat ze betekenen in dit model. Bepaal of ze waar of onwaar zijn, en motiveer uw antwoord.

(i) $\forall x Rxx$

(ii) $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall w (Aw \leftrightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$

(iii) $\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx \vee x = y)$

(iv) $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$

(v) $\forall x \forall y (Rxy) \leftrightarrow \neg Ryx)$

(vi) $\forall x (Ax \to \exists y (Ay \wedge Rxy))$

Opgave 4 Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 1-plaatsige predikaatletter A en een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$I(A) = \{1, 4\}$$
$$I(R) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$

a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, het predikaat Ax te interpreteren als 'x is omcirkeld', en de relatie Rxy als 'er loopt een pijl van x naar y'.

b. Ga van de volgende formules na wat ze betekenen in dit model. Bepaal of ze waar of onwaar zijn, en motiveer uw antwoord.

(i) $\forall x (Ax \leftrightarrow \forall y Rxy)$

(ii) $\forall x \forall y (Rxy \to Ryx)$

(iii) $\exists x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$

(iv) $\exists x \forall y (Ryy \leftrightarrow x \neq y)$

(v) $\exists x \forall y (Rxy \leftrightarrow x = y)$

(vi) $\forall x (Ax \rightarrow \exists y \exists z (y \neq z \wedge Ryx \wedge Rzx))$

Opgave 5 Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$$

a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, en de relatie Rxy te interpreteren als 'er loopt een pijl van x naar y'.

b. Onderzoek tegen welke van de volgende redeneerschema's het model een tegenmodel is:

(i) $\forall x \exists y Rxy, \forall x \neg Rxx \,/\, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \exists z (Rxz \wedge Rzy)$

(ii) $\forall x \forall y (x = y \vee Rxy \vee Ryx) \,/\, \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$

Extra Opgaven Predikatenlogica - Oplossingen

Opgave 1

a. Iedereen die van zichzelf houdt is gelukkig.
b. Iedereen van wie iemand houdt is gelukkig.
c. Iedereen houdt van iedereen die gelukkig is. OF: Iedereen houdt van wie gelukkig is. OF: Als iemand gelukkig is, houdt iedereen van hem/haar.
d. Iedereen die van twee mensen houdt, is niet gelukkig. OF: Wie van twee mensen houdt, is niet gelukkig. OF: Als iemand van twee mensen houdt, is hij/zij niet gelukkig.
e. Als iemand van twee mensen houdt, zijn ze niet allemaal (alledrie) gelukkig.

Opgave 2

a. Als iemand te laat komt, is er niemand die op haar/hem wacht.
b. Iedereen die op iemand wacht die te laat is, heeft een rothumeur.
c. Iedereen die op iemand wacht die te laat is, heeft een rothumeur.
d. Er is iemand die op iedereen wacht die te laat is en geen rothumeur heeft.
e. Als er twee mensen die op iemand wachten een rothumeur hebben, dan is zij/hij te laat.

Opgave 3.b

(i) Alle punten hebben een pijl naar zichzelf. (m.a.w. R is reflexief) Onwaar. Punt 1 heeft bijvoorbeeld geen pijl naar zichzelf.

(ii) Er zijn precies drie van elkaar verschillende punten die omcirkeld zijn. Waar. Er zijn precies drie punten die omcirkeld zijn in het model, namelijk de punten 1, 2 en 5.

(iii) Voor elke keuze van twee punten in het domein geldt: er loopt een pijl van het eerste punt naar het tweede punt, of er loopt een pijl van het tweede naar het eerste punt, of de twee punten zijn hetzelfde. (m.a.w. R is samenhangend) Onwaar. Tussen de punten 2 en 3 loopt bijvoorbeeld geen pijl; noch van 2 naar 3, noch van 3 naar 2.

(iv) Als er van een punt een pijl loopt naar een tweede (niet noodzakelijk ander) punt, en vanuit dat punt loopt een pijl naar een derde (niet noodzakelijk ander) punt, dan loopt er ook een pijl van het eerste naar het derde punt (m.a.w. R is transitief). Onwaar. Er lopen wel pijlen van 2 naar 5, en van 5 naar 3, maar er loopt geen pijl van 2 naar 3.

(v) Voor elke keuze van twee punten in het domein geldt: er loopt precies één kant op een peiltje. Onwaar. Er lopen van 4 naar 4, en van 4 naar 4 pijlen. Bovendien zijn er punten waartussen geen pijlen lopen (bijv. 2 en 3).

(vi) Vanuit elk punt dat omcirceld is loopt een pijl naar een omcirceld punt. Waar. Er loopt een pijl van 1 naar 2, van 2 naar 5, en van 5 naar zichzelf. En 1,2, en 5 zijn de enige omcircelde punten.

Opgave 4.b

(i) Van alle omcirkelde punten, en alleen van omcirkelde punten, loopt een pijl naar alle punten. Waar. Zowel van 1 als van 4 loopt een pijl naar alle punten, en voor geen van de andere punten geldt dit.

(ii) Als er een pijl in de ene richting loopt tussen twee punten, dan loopt er ook een pijl in de omgekeerde richting (m.a.w. R is symmetrisch). Onwaar. Bijvoorbeeld van 1 naar 2 loopt een pijl, maar niet van 2 naar 1.

(iii) Er zijn twee punten waartussen pijlen in beide richtingen lopen. Waar. Bijvoorbeeld tussen 1 en 4, en 3 en 3.

(iv) Er is precies één punt dat geen pijl heeft naar zichzelf. Waar. Punt 2 is het enige punt dat geen pijl heeft naar zichzelf.

(v) Er is een punt dat alleen een pijl naar zichzelf heeft. Waar. Punt 3 heeft alleen een pijl naar zichzelf.

(vi) Als een punt omcirkeld is, loopt er vanuit minstens twee punten een pijl naartoe. Waar. Naar 1 lopen pijlen vanuit 4 en 1, en naar 4 lopen pijlen vanuit 1 en 4. 1 en 4 zijn de enige omcircelde punten.

Opgave 5.b

(i) Beide premissen zijn waar, de conclusie ook. Dit model is dus geen tegenmodel tegen het redeneerschema.

(ii) De premisse is waar, de conclusie echter niet: er loopt een pijl van 4 naar 2, en van 2 naar 1, maar niet van 4 naar 1. R is dus niet transitief, en het model is een tegenmodel tegen het redeneerschema.