Logica en de Linguistic Turn 2017/2018

Peter van Ormondt
P.vanOrmondt@uva.nl

INSTITUTE FOR LOGIC, LANGUAGE AND COMPUTATION

12 oktober 2017

Verzamelingenleer

Programma

Herhaling

Machtsverzameling

Geordende paren en lijsten

Relaties

Formele eigenschappen van relaties

Wat is een verzameling?

Definitie (Cantor, 1895)

"Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."

- De verzameling mensen in dit lokaal.
- De verzameling getallen in $\mathbb{N}$ groter dan 6.
- De verzameling elektronen in het universum.
- Er is één (en slechts één) verzameling zonder elementen: de lege verzameling. We geven deze unieke verzameling aan met het symbool $\varnothing$.

Een verzameling wordt (volledig) bepaald door haar elementen. (Principe van extensionaliteit)

Elementen van een verzameling

Naast de notie van verzameling nemen we de (tweeplaatsige) relatie “is een element van” aan. Zij a een object en A een verzameling dan schrijven we $a \in A$ als *a een element is van A*, en $a \notin A$ als dat niet zo is.

Voorbeeld

- *Koning Willem Alexander is een element van de verzameling staatshoofden.*
- π *is een element van de reële getallen:* $\pi \in \mathbb{R}$*.*
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(Pythagoras)*
- *PvO is een element van de verzameling LLT docenten.*

Beschrijving van verzamelingen

We hebben twee manieren gezien hoe we verzamelingen kunnen beschrijven:

1. Opsomming,
2. Identificatie dmv een karakteristieke eigenschap.

Beschrijving van verzamelingen door opsomming

Om verzamelingen aan te duiden maken we gebruik van accolades, }, { en de comma ','. De elementen van een verzameling worden gescheiden door comma's.

Voorbeeld

$\{Luca, Katrin, Maria, Peter\}$ *is de verzameling LLT docenten in 2017.*

Beschrijving van verzamelingen door karakteristieke eigenschap

We kunnen een verzameling ook beschrijven door een karakteriserende eigenschap van de elementen te specificeren.

Voorbeeld

- *De verzameling A is de verzameling van rode auto's.*
- *De verzameling E bestaat uit gehele getallen die deelbaar zijn door twee*

We schrijven dit als volgt:

$$A := \{x \mid x \textit{ is een rode auto}\}$$

$$E := \{n \in \mathbb{N} \mid n \textit{ is deelbaar door } 2\}$$

En algemeen:

$$B := \{x \mid \varphi(x)\},$$

waar $\varphi(x)$ staat voor "x heeft eigenschap φ".

Terzijde

De paradox van Russell

We kunnen dus op twee manieren verzamelingen beschrijven: door opsomming van de elementen en door het specificeren van een karateristieke eigenschap van de elementen van de verzameling.

Voorbeeld

Laten we schrijven $\varphi(x)$ *voor 'x heeft de eigenschap een fiets te zijn'. Dan is*

$$F = \{x \mid \varphi(x)\}$$

de verzameling fietsen.

Een andere manier om dit zeggen is dat iedere goed gearticuleerde eigenschap een verzameling definiëert, nl. die verzameling van objecten die die eigenschap hebben.

Voorbeeld

Zij $\psi := x \neq x$. *Welke verzameling is dit*

$$B := \{x \mid \psi(x)\}?$$

De paradox van Russell

Dit intuïtieve idee is de oorzaak van een ernstige paradox:

> *Form now the assemblage of all classes which are not members of themselves. This is a class: is it a member of itself or not? If it is, it is one of those classes that are not members of themselves, i.e., it is not a member of itself. If it is not, it is not one of those classes that are not members of themselves, i.e. it is a member of itself. Thus of the two hypotheses - that it is, and that it is not, a member of itself – each implies its contradictory. This is a contradiction.*
>
> *[Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, 1919, 136]*

De paradox van Russell

Verzamelingen zijn niet altijd een element van zichzelf. De verzameling iPhones is bijvoorbeeld niet een iPhone. Daarentegen, de verzameling van dingen die niet een telefoon zijn, is dat bijvoorbeeld wel.

Laat $\varphi(x)$ staan voor de eigenschap 'geen element van jezelf zijn', i.e., $x \notin x$. Definiëer nu de verzameling $R := \{x \mid \varphi(x)\}$, de verzameling van alle verzamelingen die geen element zijn van zichzelf. Nu kunnen we ons afvragen of $R \in R$? Als dat zo zou zijn dan volgens de definitie van R zou moeten gelden dat $R \notin R$. Stel dan dat $R \notin R$, maar dat betekent dat $R \in R$. Contradictie.

Verzamelingen vergelijken

Zij A, B twee willekeurige verzamelingen.

- Als alle elementen a van A ook in B zitten, zeggen we dat A een *deelverzameling is van* B. We schrijven $A \subseteq B$.

Bijvoorbeeld:

- De verzameling vrouwen is een deelverzameling van de verzameling mensen.
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is even}\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is even of oneven}\}$
- Als $C := \{x \mid x \text{ is uva student}\}$ en $D := \{x \mid x \text{ inwoner van Nederland}\}$, dan $C \subseteq D$.
- Als $C := \{x \mid x \text{ is uva student}\}$ en $D := \{x \mid x \text{ inwoner van Amsterdam}\}$, dan $C \not\subseteq D$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$

Operaties op verzamelingen

Zij A, B twee willekeurige verzamelingen.

- De verzameling bestaande uit de elementen die in A **en** B zitten noemen we de *doorsnede* van A en B. We schrijven $A \cap B$.

Bijvoorbeeld:

- Als $A := \{1, 4, 5, 6\}$ en $B := \{1, 3, 6\}$, dan is de doorsnede $A \cap B = \{1, 6\}$
- De doorsnede van de verzameling Amerikaanse presidenten en filmacteurs is de verzameling met (als enige) element *Ronald Reagan*.
- De doorsnede van de verzameling LLT-docenten en verzameling mensen die in Italië zijn geboren is de verzameling $\{\text{Maria}, \text{Luca}\}$

Machtsverzamelingen

De machtsverzameling

Een verzameling A is een deelverzameling van een verzameling B desda voor alle a geldt dat als $a \in A$, dan $a \in B$. We schrijven in dit geval: $A \subseteq B$. We definiëren nu een nieuwe operatie op verzamelingen, de *machtsverzameling*:

Definitie (machtsverzameling)

Zij A een verzameling. De *machtsverzameling* van de verzameling A, aangeduid met $\wp(A)$, is de verzameling die bestaat uit alle deelverzamelingen van A.

Voorbeeld

Zij $A := \{a, 2, A\}$, $B := \varnothing$. *Dan*

$$\begin{aligned}
&\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{2\}, \{A\}, \{a, 2\}, \{2, A\}, \{a, A\}, \{a, 2, A\}\},\\
&\wp(B) = \{\varnothing\}\\
&\wp(\wp(B)) = \wp(\wp(\varnothing)) = \wp(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}
\end{aligned}$$

De machtsverzameling

Stelling (Cantor)

Zij x een verzameling. De machtsverzameling van x, $\wp(x)$, is strict groter dan x.

Merk op dat dit geldt voor willekeurige x, dus ook voor oneindige x. M.a.w.

$$x < \wp(x) < \wp\wp(x) < \wp\wp\wp(x) < \cdots$$

Geordende paren en lijsten

Geordende paren en lijsten

Een verzameling wordt volledig (en alleen) bepaald door haar elementen. De elementen van een verzameling zijn niet geordend.

Voorbeeld

$$\{1,2,3,4,5\} = \{5,4,3,2,1\}$$
$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

We noemen verzamelingen ook wel *ongeordend*.

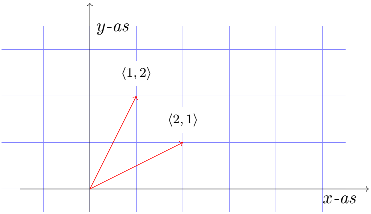
Geordende paren en lijsten

Soms kan ordening echter wel van belang zijn.

Geordende paren en lijsten

Soms kan ordening echter wel van belang zijn.

Voorbeeld



x houdt van y, *will niet zeggen dat* y houdt van x

In de voorbeelden is de ordening van de elementen van het paar wel van belang. We noemen deze ook wel *geordende paren*. Meer algemeen kunnen we denken aan een geordende verzameling zoals bijvoorbeeld de uitslag van de Tour de France. Een geordende verzameling noemen we een *lijst*.

Geordende paren en lijsten

Definitie

Een verzameling A met n elementen die geordend zijn noemen we een *lijst* en schrijven we als

$$A := \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

Een lijst met twee elementen noemen we ook wel een *geordend paar*. De elementen van geordende verzamelingen worden ook wel *coördinaten* genoemd.

Relaties

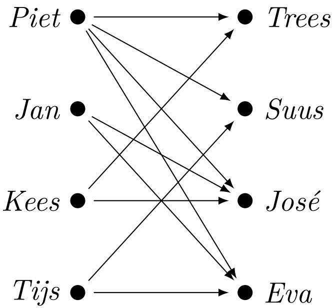
Relaties

Tot nu toe hebben we alleen gekeken naar verzamelingen, gekeken naar hoe we verzamelingen kunnen vergelijken, nieuwe verzamelingen genereren uit al bestaande verzamelingen. We gaan nu verzamelingen gebruiken om de (formele) notie van *relatie* vast te leggen, en in het verlengde daarvan het *functiebegrip*.

Relaties

Voorbeeld (Informeel voorbeeld van een relatie)

$A := \{Piet, Jan, Kees, Tijs\}$
$B := \{Trees, Suus, José, Eva\}$
x *is bevriend met* y



Relaties

De relatie `is_bevriend_met` op de verzamelingen A en B kunnen we nu weergeven door een *verzameling van geordende paren*:

$$\begin{aligned}\texttt{is\_bevriend\_met} := \{&\langle \text{Piet}, \text{Trees}\rangle, \langle \text{Piet}, \text{Suus}\rangle, \langle \text{Piet}, \text{José}\rangle,\\ &\langle \text{Piet}, \text{Eva}\rangle, \langle \text{Jan}, \text{José}\rangle, \langle \text{Jan}, \text{Eva}\rangle,\\ &\langle \text{Kees}, \text{Trees}\rangle, \langle \text{Kees}, \text{José}\rangle,\\ &\langle \text{Tijs}, \text{Suus}\rangle, \langle \text{Tijs}, \text{Eva}\rangle\}\end{aligned}$$

Cartesisch product

Zij A, B verzamelingen. Het *Cartesisch product* $A \times B$ is de verzameling

$$A \times B := \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \ \& \ b \in B\}$$

en geeft ons de verzameling van alle geordende paren zodanig dat de eerste coördinaat een element is van A en de tweede coördinaat een element van B.

Cartesisch product

Laat de verzamelingen A en B als volg zijn gedefiniëerd.

$$\begin{aligned} A &:= \{0, 1, 2\} \\ B &:= \{a, b\} \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} A \times B = \{&\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \\ &\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \\ &\langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\} \end{aligned}$$

Relatie als deelverzameling van Cartesisch Product

Neem

$$A := \{\text{Piet}, \text{Jan}, \text{Kees}, \text{Tijs}\}, B := \{\text{Trees}, \text{Suus}, \text{José}, \text{Eva}\}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & \langle \text{Piet}, \text{Trees} \rangle, \langle \text{Piet}, \text{Suus} \rangle, \langle \text{Piet}, \text{José} \rangle, \langle \text{Piet}, \text{Eva} \rangle, \\ & \langle \text{Jan}, \text{Trees} \rangle, \langle \text{Jan}, \text{Suus} \rangle, \langle \text{Jan}, \text{José} \rangle, \langle \text{Jan}, \text{Eva} \rangle, \\ & \langle \text{Kees}, \text{Trees} \rangle, \langle \text{Kees}, \text{Suus} \rangle, \langle \text{Kees}, \text{José} \rangle, \langle \text{Kees}, \text{Eva} \rangle \\ & \langle \text{Tijs}, \text{Trees} \rangle, \langle \text{Tijs}, \text{José} \rangle, \langle \text{Tijs}, \text{Suus} \rangle, \langle \text{Tijs}, \text{Eva} \rangle \} \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned} \texttt{is\_bevriend\_met} = \{ & \langle \text{Piet}, \text{Trees} \rangle, \langle \text{Piet}, \text{Suus} \rangle, \langle \text{Piet}, \text{José} \rangle, \\ & \langle \text{Jan}, \text{José} \rangle, \langle \text{Jan}, \text{Eva} \rangle, \\ & \langle \text{Kees}, \text{Trees} \rangle, \langle \text{Kees}, \text{José} \rangle, \\ & \langle \text{Tijs}, \text{Suus} \rangle, \langle \text{Tijs}, \text{Eva} \rangle \} \subseteq A \times B \end{aligned}$$

Eigenschappen van relaties

Laat M de verzameling mensen zijn en neem de volgende relatie $R \subseteq M \times M$. We definiëren R als volgt:

$$xRy := x \text{ is even groot als } y$$

Het is dan gelijk duidelijk dat ieder element $x \in M$ hieraan voldoet, i.e., voor alle $x \in M$ geldt dat xRx. We zouden ook kunnen schrijven: voor alle $x \in M$: $\langle x, x \rangle \in R$.

We noemen een dergelijke relatie *reflexief*.

Eigenschappen van relaties

Laat M de verzameling mensen zijn en neem de volgende relatie $R \subseteq M \times M$. We definiëren R als volgt:

$$xRy := x \text{ is getrouwd met } y$$

Neem een of ander paar $\langle x, y \rangle$ zodanig dat $\langle x, y \rangle \in R$, dan kunnen we opmerken dat dan moet gelden $\langle y, x \rangle \in R$. En dit geldt natuurlijk voor alle paren $\langle x, y \rangle \in R$.

We noemen een dergelijke relatie *symmetrisch*.

Conclusies

- We hebben een nieuwe operatie op verzamelingen gedefiniëerd: de machtsverzameling. De machtsverzameling van een verzameling x, $\wp(x)$, is de verzameling die bestaat uit alle deelverzamelingen van x.
- We hebben gezien dat een simpel, intuïtief idee, de wereld kan doen laten schudden.
- We hebben gezien hoe we de formele notie van (tweeplaatsige) *relatie* precies kunnen vastleggen met behulp van de verzamelingenleer, door een relatie te beschouwen als een verzameling *geordende paren*.
- We hebben (een paar) formele eigenschappen van relaties gezien.