Logica en de Linguistic Turn 2017/2018

Peter van Ormondt
P.vanOrmondt@uva.nl

Institute for Logic, Language and Computation

7 november 2017

Programma

Herhaling

Semantiek

Herhaling

Vocabulaire

Een taal $\mathcal{L}$ van de predicatenlogica is gegeven met vijf verzamelingen van symbolen:

Individuele constanten: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Individuele variabelen: $x, y, z, u, w, v, x_1, x_2, \ldots, x_n$

Predicaten: P, Q, R. Vaak gebruiken we P om een predicaat aan te duiden en R om een relatie aan te duiden.

Logische constanten: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, =$. We kenne al deze symbolen al, behalve de laatste drie. Dit zijn respectievelijk, de *universele kwantor*, de *existentiële kwantor*, en het *identiteitsteken*, wat we kunnen opvatten als een tweeplaatsig relatieteken, maar zullen behandelen als logische constante.

Interpunctietekens We kennen al ')' en '(', en we voegen daar de comma ',' aan toe.

Syntaxis

Definitie

1. Als A een n-plaatsige predicaatletter is in de vocabulaire van $\mathcal{L}$ en $t_1, \ldots, t_n$ zijn een constante of een variabele in de vocabulaire van $\mathcal{L}$ dan is $At_1, \ldots, t_n$ een *formule* van $\mathcal{L}$.
2. Als t_1, t_2 een constante of variabele zijn van de vocabulaire, dan is $t_1 = t_2$ een formule in $\mathcal{L}$.
3. Als φ een formule is in $\mathcal{L}$ dan is $\neg\varphi$ dat ook.
4. Als $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ dan $\varphi\Box\psi \in \mathcal{L}$, waar $\Box \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$.
5. Als $\varphi \in \mathcal{L}$ en x een variable, dan zijn $\forall x\varphi$ en $\exists x\varphi$ ook formules van $\mathcal{L}$.
6. Alleen dat wat op grond van voornoemde clausules in een eindig aantal stapppen gegenereerd kan worden is een fomule van $\mathcal{L}$.

Semantiek van predicatenlogica

Na het definiëren van het vocalbulaire de syntaxis moeten we gaan bepalen wat de zinnen van onze taal $\mathcal{L}$ betekenen (of wat we willen dat ze betekenen) en hoe de betekenis afhangt van de delen waaruit de zin is opgebouwd.

Semantiek van predicatenlogica

Na het definiëren van het vocalbulaire de syntaxis moeten we gaan bepalen wat de zinnen van onze taal $\mathcal{L}$ betekenen (of wat we willen dat ze betekenen) en hoe de betekenis afhangt van de delen waaruit de zin is opgebouwd.
Aangezien we een complexere taal hebben gedefiniëerd zullen we ook een complexere semantiek moeten optuigen en kunnen we niet volstaan met valuatiefuncties alleen omdat onze kleinste delen geen zinnen zijn zoals in propositielogica. De atomaire formules, zoals we hebben gezien, bestaan uit constanten, variabelen en predicaatletters en we zullen dus moeten laten zien hoe de waarheid van een atomaire formule afhangt van de interpretatie van deze kleinste taalelementen.

Semantiek van predicatenlogica

Voorbeeld

(1) *Socrates zit op een stoel.*

(2) *Plato bewondert Socrates.*

We zouden (1) in propositielogica vertalen met p *en (2) met* q*. En* p *en* q *zijn waar of onwaar afhangende van de valuatiefunctie. In predicatenlogica zouden we (1) en (2) vertalen met* Zs *en* Bps*, respectievelijk, en we zien onmiddelijk dat (1) en (2) in predicatenlogica dieper geanalyseerd worden.*

Semantiek van predicatenlogica

Voorbeeld

(1) Socrates zit op een stoel.

(2) Plato bewondert Socrates.

We zouden (1) in propositielogica vertalen met p en (2) met q. En p en q zijn waar of onwaar afhangende van de valuatiefunctie. In predicatenlogica zouden we (1) en (2) vertalen met Zs en Bps, respectievelijk, en we zien onmiddelijk dat (1) en (2) in predicatenlogica dieper geanalyseerd worden. Maar wat zijn nu de voorwaarden voor de waarheid van zinnen als Zs en Bps? Hoe moeten we de constanten en predicaten interpreteren?

Interpretatiefuncties

Allereerst associëren we met een taal $\mathcal{L}$ discussiedomein D. Dit domein bevat de dingen waar we het in onze taal over kunnen hebben. Dit kunnen de studenten van LLT zijn, de cast van GoT, de reële getallen, alles in het universum. Voor het moment kunnen we zeggen dat de formele eigenschap van D *een verzameling objecten is*.

Laten we beginnen met het interpreteren van de niet-logische constanten. In de natuurlijke taal zijn eigennamen zogenaamde starre verwijzers, ze verwijzen (vrijwel) altijd naar hetzelfde maar in een formele taal moeten we eerst vastleggen voor iedere naam in de taal waar het naar verwijst.

Interpretatiefuncties

Voorbeeld

Stel we hebben constanten $c_1, \ldots, c_n$ *en een domein* $D := \{o_1, \ldots, o_n\}$, *dan associëren we met iedere constante een object in* D *middels een interpretatiefunctie* I.

$\mathcal{L}$	I	D
c_1	$\longrightarrow$	o_1
c_2	$\longrightarrow$	o_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	$\longrightarrow$	o_n

We zeggen dat $I(c)$ *een interpretatie is van constante* c. *Soms spreken we ook van de verwijzing van* c. *Als* $I(c) = o$, *dan zeggen we dat* c *een naam is van* o, *of dat* o *de verwijzing is van* c. *We veronderstellen dat* I *surjectief is: alles heeft een naam en het is niet uitgesloten dat een object meerdere namen heeft!*

Interpretatiefuncties

We kunnen nu dingen ‘aanwijzen’ met constanten maar hoe zit het met eigenschappen? En relaties? Neem de zin

(3) Socrates is wijs Ws

Het enige wat we verlangen van een interpretatiefunctie is dat deze ons in staat stelt te beoordelen of Ws waar is of niet. Om dit vast te kunnen stellen moeten we weten wie er allemaal wijs is én of Socrates, i.e., $I(s)$, het object waarnaar s verwijst, daar één van is. We zullen de predicaatletter W dus interpreteren als die verzameling objecten in D die wijs zijn:

$$I(W) \subseteq D$$

Nu kunnen we zeggen of Ws waar is of niet. Deze uitspraak is waar desda $I(s) \in I(W)$. De interpretatie van een predicaat is dus de verzameling van objecten die de eigenschap hebben die wordt uitgedrukt door dat predicaat.

Interpretatiefuncties

Vergelijkbaar kunnen we nu relaties behandelen.

(4) Aristoteles onderwijst Alexander de Grote. Oag

Deze zin is waar desda de interpretaties van de constanten zich op een bepaalde manier verhouden, nl. dat Alexander de Grote een leerling is van Aristoteles. Het tweeplaatsige predicaat interpreteren we met een (binaire) relatie bestaande uit alle onderwijzer-leerling paren in het domein D.

De interpretatie $I(O)$ is dus de relatie $R \subseteq D \times D$ en Oag is waar desda

$$\langle I(a), I(g) \rangle \in R$$

Interpretatiefuncties

Taal

(1) Aristoteles onderwijst Alexander de Grote

(2) Oag

Wereld

$$D = \{b_1, b_2\}$$
$$R = \{\langle b_1, b_2 \rangle\}$$

$$I(a) = b_1$$
$$I(g) = b_2$$
$$I(O) = \{\langle b_1, b_2 \rangle\}$$

Nu kunnen we vaststellen of Oag waar is! Ja in dit geval, want

$$\langle I(a), I(g) \rangle \in I(O).$$

Interpretatiefuncties

Voorbeeld (Notatie)

Herinner je het volgende:

$$\forall x \exists y (Ax \to By) \tag{1}$$
$$\exists y (Ax \to By) \tag{2}$$

In formule (2) is de variabele x vrij in de formule omdat deze niet wordt gebonden door een kwantor. Dit in tegenstelling tot (1). We kunnen de vrije variabele in (2) vervangen door een constante c en we gebruiken daarvoor de volgende notatie (cf. Gamut p. 78):

$$[c/x]\exists y (Ax \to By) = \exists y (Ac \to By)$$

Interpretatiefuncties

Okee, nu kunnen we zinnen als Pt, Qs, $Labc$, Oaa, etc., interpreteren maar hoe moeten we gekwantificeerde zinnen verstaan? Wat is de betekenis van "Iemand loopt" of "Iedereen houdt van Maria"?

Laten we kijken naar "Iemand loopt" met als vertaling $\exists x Lx$. We hebben in het voorgaande aangenomen dat alle elementen in ons domein een naam hebben. Als $\exists x Lx$ waar is, moet er dus een constante c zijn in onze taal zodanig dat $I(c)$ de eigenschap L heeft, oftewel $I(c) \in I(L)$.

We zeggen dus dat $\exists x Lx$ waar is desda voor tenminste één constante $c \in \mathcal{L}$, $[c/x]Lx$ waar is. Dus er moet een c zijn zodanig dat Lc waar is.

Interpretatiefuncties

Voor universele kwantoren kunnen we nu iets vergelijkbaar doen. Neem de zin “Iedereen loopt” met als vertaling: $\forall x Lx$. Als $\forall x Lx$ waar is dan moet het zo zijn dat iedereen in mijn domein de eigenschap L heeft. Dwz: voor alle $c \in \mathcal{L}$ moet het zo zijn dat $I(c) \in I(L)$.

We zeggen dus dat $\forall x Lx$ waar is desda voor alle constante $c \in \mathcal{L}$, $[c/x]Lx$ waar is.

Interpretatiefuncties

Nu hebben we gezien hoe de waarheid van atomaire zinnen en kwantoren afhangt van de interpretatiefuncties. Nu we bij waarheid zijn aangekomen kunnen we de oude vertrouwde valuatiefunctie uit de kast halen om te garanderen dat de waarheid van een zin afhangt van de delen waaruit die zin is opgebouwd.
Voor we dit doen leggen we eerst vast wat een model is.

Definitie (Model)

Een model $\mathcal{M}$ voor een taal $\mathcal{L}$ van de predicatenlogica bestaat uit een niet-lege verzameling welke we het domein zullen noemen, $D \neq \varnothing$, tezamen met een interpretatiefunctie I die is gedefiniëerd op de contstanten en predicaatletters van $\mathcal{L}$ met de volgende eigenschappen:

1. Als c een constante is van $\mathcal{L}$, dan is $I(c) \in D$.
2. Als B een n-plaatsig predicaatletter is van $\mathcal{L}$, dan is $I(B) \subseteq \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.

Interpretatiefuncties

Definitie (Waarheid)

Zij $\mathcal{M}$ een model voor $\mathcal{L}$ zodanig dat I de constanten van $\mathcal{L}$ afbeeldt in het domein D, dan is een valuatie $V_{\mathcal{M}}$ *gebaseerd op* $\mathcal{M}$ alsvolgt gedefiniëerd:

1. Als $Aa_1, \ldots, a_n$ een atomaire zin is van $\mathcal{L}$, dan is $V_{\mathcal{M}}(Aa_1, \ldots, a_n) = 1$ desda $\langle I(a_1), \ldots, I(a_n) \rangle \in I(A)$.
2. $V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$.
3. $V_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ en $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$.
4. $V_{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ of $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$.
5. $V_{\mathcal{M}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ of $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$.
6. $V_{\mathcal{M}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$.
7. $V_{\mathcal{M}}(\forall x\varphi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}([c/x]\varphi) = 1$ voor alle $c \in \mathcal{L}$.
8. $V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1$ desda $V_{\mathcal{M}}([c/x]\varphi) = 1$ voor tenminste één $c \in \mathcal{L}$.

Als $V_{\mathcal{M}} = 1$ zeggen we dat φ *waar is in* $\mathcal{M}$. We schrijven in dat geval vaak: $\mathcal{M} \models \varphi$.

Anselmus

Gödels bewijs

$$(P(\varphi) \wedge \Box \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))) \to P(\psi) \qquad \text{(Axiom 1)}$$

$$P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi) \qquad \text{(Axiom 2)}$$

$$P(\varphi) \to \Diamond \exists x \varphi(x) \qquad \text{(Theorem 1)}$$

$$G(x) \leftrightarrow \forall \varphi(P(\varphi) \to \varphi(x)) \qquad \text{(Definition 1)}$$

$$P(G) \qquad \text{(Axiom 3)}$$

$$\Diamond \exists x G(x) \qquad \text{(Theorem 2)}$$

$$\varphi \text{ ess } x \leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall \psi(\psi(x) \to \Box \forall y(\varphi(y) \to \psi(y))) \qquad \text{(Definition 2)}$$

$$P(\varphi) \to \Box P(\varphi) \qquad \text{(Axiom 4)}$$

$$G(x) \to G \text{ ess } x \qquad \text{(Theorem 3)}$$

$$E(x) \leftrightarrow \forall \varphi(\varphi \text{ ess } x \to \Box \exists y \varphi(y)) \qquad \text{(Definition 3)}$$

$$P(E) \qquad \text{(Axiom 5)}$$

$$\Box \exists x G(x) \qquad \text{(Theorem 4)}$$

Die Welt, 17 oktober 2013

"Forscher beweisen Existenz Gottes am Computer"

`https://www.welt.de/wissenschaft/article120995923/Forscher-beweisen-Existenz-Gottes-am-Computer.html`